

**ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3**

**Πρόβλημα 1.** Βρείτε τις κοινές λύσεις στο  $\mathbb{C}^2$  των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x(y^2 - x)^2 - y^5 &= 0 \\ y^4 + y^3 - x^2 &= 0\end{aligned}$$

**Πρόβλημα 2.** Βρείτε τις κοινές λύσεις στο  $\mathbb{P}\mathbb{C}^2$  των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned}x_0^4 + x_1^4 - x_1^2 x_2^2 &= 0 \\ x_0^4 + x_1^4 - 2x_1^3 x_2 - 2x_0^2 x_1 x_2 - x_0 x_1^2 x_2 + x_1^2 x_2^2 &= 0\end{aligned}$$

**Πρόβλημα 3.** Έστω  $f(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ . Δείξτε ότι αν  $f(a, b) = 0$  για κάποιο  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$  τότε το  $f(x, y)$  μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$f(x, y) = g(x, y)(x - a) + h(y)(y - b),$$

για κάποια  $g(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$  και  $h(y) \in \mathbb{C}[y]$ .

**Πρόβλημα 4.** Έστω  $f(x_0, x_1, x_2), g(x_0, x_1, x_2)$  ομογενή πολυώνυμα, μή σταθερά, με συντελεστές στους μιγαδικούς. Με χρήση της επιλύουσας, δείξτε ότι έχουν κάποια κοινή λύση.