ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Πρόβλημα 1. Έστω $l = 0$ ευθεία, $f = 0$ καμπύλη τού $\mathbb{C}^2$ και P σημείο. Δείξτε ότι η ευθεία $l = 0$ είναι εφαπτόμενη τής καμπύλης $f = 0$ στο σημείο P άν και μόνον άν $I(P, f \cap l) \geq m_P(f)$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε όλα τα σημεία τομής και τούς αντίστοιχους αριθμούς τομής για τα παρακάτω ζευγάρια καμπυλών τού $\mathbb{PC}^2$. Επιβεβαιώστε το θεώρημα τού Bezout.
α) $x_1^2x_2 - x_0(x_0 - 2x_2)(x_0 + x_2) = 0$ και $x_1^2 + x_0^2 - 2x_0x_2 = 0$
β) $x_1^5 - x_0(x_1^2 - x_0x_2)^2 = 0$ και $x_1^4 + x_1^3x_2 - x_0^2z_2^2 = 0$.

Πρόβλημα 3. Έστω $f(x, y)$ πολυώνυμο και έστω ότι $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ όχι μηδενικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι αν P σημείο τής καμπύλης $f(x, y) = 0$ τότε $\mathrm{m}_P(f_x) \geq m_P(f) - 1$.

Πρόβλημα 4 Έστω $f(x, y)$ πολυώνυμο και έστω ότι τα $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ είναι μηδενικά πολυώνυμα. Δείξτε ότι το $f(x, y)$ είναι σταθερό. Ομοίως, αν $F(x_0, x_1, x_2)$ πολυώνυμο για το οποίο και οι τρείς μερικές παράγωγοι είναι μηδενικές, τότε το F είναι σταθερό πολυώνυμο.

Πρόβλημα 5. Έστω ανάγωγη καμπύλη τού $\mathbb{PC}^2$, βαθμού n που ορίζεται από την εξίσωση $F = 0$. Δείξτε ότι $\sum_P m_P(F)(m_P(F) - 1) \leq n(n - 1)$.

Πρόβλημα 6. Έστω $F = 0$ μια ανάγωγη καμπύλη τρίτου βαθμού στο $\mathbb{PC}^2$. Δείξτε ότι μια ευθεία δεν μπορεί να εφάπτεται στην καμπύλη σε δύο σημεία της.