

ΘΕΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Πρόβλημα 1. α) Δείξτε ότι το παρακάτω υποσύνολο του \mathbb{C}^3 είναι αλγεβρικό

$$\{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{C}^3, t \in \mathbb{C}\}.$$

β) Δείξτε ότι το παρακάτω υποσύνολο του \mathbb{C}^2 δεν είναι αλγεβρικό

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Πρόβλημα 2. α) Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R . Δείξτε ότι $\text{RadRad}I = \text{Rad}I$.

β) Βρείτε το ριζικό του ιδεώδους $\mathbb{I}(\{x^2y^3\})$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y]$.

Πρόβλημα 3. Έστω V αλγεβρικό υποσύνολο του \mathbb{C}^n και P σημείο που δεν ανήκει στο V . Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F(x_1, \dots, x_n)$ με $F(Q) = 0$, για κάθε $Q \in V$, αλλά $F(P) \neq 0$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\mathbb{I}(V \cup \{P\}) \neq \mathbb{I}(V)$).

Πρόβλημα 4. Βρείτε το ιδεώδες $\mathbb{I}V(I)$, όπου $I = \mathbb{I}(\{2y + x^3\}) \subseteq \mathbb{C}[x, y]$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε δύο αλγεβρικά υποσύνολα V, W του \mathbb{C}^n των οποίων η διαφορά $V \setminus W = \{v \in V, v \notin W\}$ να μην είναι αλγεβρικό.

Πρόβλημα 6. Έστω I_1, \dots, I_s ιδεώδη του \mathbb{C}^n . Δείξτε ότι

$$\mathbb{V}(I_1 \cdots I_s) = \mathbb{V}(I_1 \cap \cdots \cap I_s).$$