ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R.
α) Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}\mathrm{Rad}I = \mathrm{Rad}I$.
β) Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}I = R \Leftrightarrow I = R$.

Πρόβλημα 2. Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^2y^3 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y]$.

Πρόβλημα 3. **α)** Έστω I, J ιδεώδη δακτυλίου R με $I \subseteq J$. Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}I \subseteq \mathrm{Rad}J$.
β) Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^{100}, y^{57} >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y]$. (*Υπόδειξη:* Χρήση τού α) σε συνδυασμό με το ότι το ιδεώδες $< x, y >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathbb{C}[x, y]$).
γ) Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^3+y^2-1, y-1 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x, y]$.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $y^2 - x^3$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο (ως στοιχείο τού $\mathbb{C}[x, y]$).

Πρόβλημα 5. Αποδείξτε ότι το ιδεώδες $< x, y >$ δεν είναι κύριο ιδεώδες τού δακτυλίου $K[x, y]$, K σώμα.

Πρόβλημα 6. Βρείτε τον πυρήνα τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbb{C}[x, y] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ που ορίζεται ως $\phi(f(x, y)) = f(x, x)$.

Πρόβλημα 7. **α)** Έστω $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$, K σώμα. Δείξτε ότι το ιδέώδες $< f(x_1, \ldots, x_n) >$ είναι πρώτο ιδέωδες τού δακτυλίου $K[x_1, \ldots, x_n]$ αν και μόνον αν το πολυώνυμο $f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x_1, \ldots, x_n]$.
β) Δείξτε ότι στον δακτύλιο $K[x]$, K σώμα, το μηδενικό ιδέωδες $< 0 >$ είναι πρώτο ιδεώδες. Δείξτε, επίσης, ότι κάθε μή μηδενικό πρώτο ιδεώδες τού $K[x]$ είναι και μέγιστο ιδεώδες (*Υπενθύμιση:* τα ιδεώδη τού $K[x]$ είναι κύρια ιδέωδη).

Πρόβλημα 8. **α)** Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x >$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x + 1, 5 >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{Z}[x]$.

Πρόβλημα 9. Εστω $\phi : R \longrightarrow S$ *επιμορφισμός* δακτυλίων και έστω I ιδεώδες τού R.
α) Δείξτε ότι το $\phi(I)$ είναι ιδεώδες τού S.

β) Εστω $\ker\phi \subseteq I$. Δείξτε ότι το I είναι πρώτο ιδεώδες τού R εάν και μόνον εάν το $\phi(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού S.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\Phi : \mathbb{C}[x, y, z] \longrightarrow \mathbb{C}[x, y]$ που ορίζεται ως $\Phi(f(x, y, z)) = f(x, y, iy)$.
α) Δείξτε ότι ο Φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του.
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2 - y^2 - 1 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y]$ (*Υπόδειξη:* Χρήση τού προβλήματος 7α).
γ) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I =< x^2 + y^2 + 2z^2 - 1, y + iz >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y, z]$. (*Υπόδειξη:* Χρήση τού προβλήματος 9β).