ΘΕΜΑΤΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ - ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Έστω S ένα άπειρο υποσύνολο ενός σώματος K και έστω $f(x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$. Υποθέτουμε ότι $f(a_1,\ldots,a_n) = 0$ για κάθε $a_i \in S$. Δείξτε τότε ότι το $f(x_1,\ldots,x_n)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Πρόβλημα 2. α) Βρείτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)$ τού K^3, K (άπειρο) σώμα.
β) Δείξτε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)) =< y - x^2, z - x^3 >$.
γ) Με χρήση του Προβλήματος 9β) τού φυλλαδίου #1, δείξτε ότι το ιδεώδες $< y - x^2, z - x^3 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $K[x, y, z]$.
δ) Συμπεράνατε ότι το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< y-x^2, z-x^3 >)$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι το παρακάτω υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ δεν είναι αλγεβρικό

$$\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}.$$

Πρόβλημα 4. α) Έστω V αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{C}^n$ και P σημείο που δεν ανήκει στο V. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F(x_1,\ldots,x_n)$ με $F(Q) = 0$, για κάθε $Q \in V$, αλλά $F(P) \neq 0$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\mathbb{I}(V \cup \{P\}) \neq \mathbb{I}(V)$).
β) Έστω $S = \{P_1,\ldots,P_r\}$ πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ και Q σημείο τού $\mathbb{C}^2$ με $Q \notin S$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F \in \mathbb{C}[x, y]$ με $F(P_i) = 0$ για κάθε $P_i \in S$ και $F(Q) = 1$.
γ) Βρείτε αντιπαράδειγμα για τον παραπάνω ισχυρισμό στην περίπτωση που το S είναι άπειρο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$.

Πρόβλημα 5. Έστω I, J ιδεώδη τού $\mathbb{C}[x, y]$.
α) Δείξτε ότι το σύνολο $I : J = \{f \in \mathbb{C}[x, y]$ με $fg \in I$ για κάθε $g \in J\}$ είναι ιδεώδες τού $\mathbb{C}[x, y]$ το οποίο περιέχει το ιδεώδες I.
β) Δείξτε ότι άν το I είναι ριζικό ιδέωδες τότε και το $I : J$ είναι ριζικό ιδεώδες.
γ) Δείξτε ότι το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(I : J)$ περιέχει την διαφορά των αλγεβρικών συνόλων $\mathbb{V}(I)\backslash\mathbb{V}(J) = \{p \in \mathbb{V}(I)$ με $p \notin \mathbb{V}(J)\}$.
δ) Βρείτε ένα παράδειγμα όπου στο ερώτημα γ) να έχουμε γνήσιο εγκλεισμό. (Υπόδειξη: Βρείτε δύο αλγεβρικά υποσύνολα V, W τού $\mathbb{C}^2$ των οποίων η διαφορά $V\backslash W = \{v \in V,\ \ v \notin W\}$ να μήν είναι αλγεβρικό).

Πρόβλημα 6. α) Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbb{V}(< x^3 + x - x^2y - y >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{C}^2$.
β) Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $V = \mathbb{V}(< x^2-y^2, x^3+xy^2-y^3-x^2y-x+y >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{C}^2$ (Υπόδειξη: ποιό είναι

το V?).

Πρόβλημα 7. Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1 >)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων τού $\mathbb{C}^3$ (Υπόδειξη: Διαιρέστε πρώτα το $x^2 + y^2 - 1$ με το $x^2 - z^2 - 1$).

Πρόβλημα 8. Δείξτε ότι το πολυώνυμο $F(x, y) = y^2 + x^2(x-1)^2 \in \mathbb{R}[x, y]$ είναι ανάγωγο, όμως το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< F >)$ δεν είναι ανάγωγο.