ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-13, ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Πρόβλημα 1. Δείξτε ότι τό πολυώνυμο $y^2 - x^3$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο (ως στοιχείο τού $\mathbb{C}[x,y]$).

Πρόβλημα 2. Αποδείξτε ότι το ιδεώδες $< x-1,\ y+x^2-1 >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $K[x,y]$, K σώμα.

Πρόβλημα 3. **α)** Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2+1 >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{R}[x]$.
β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2+1 >$ δεν είναι μέγιστο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x]$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε τον πυρήνα τού ομομορφισμού δακτυλίων $\phi : \mathbb{C}[x,y] \longrightarrow \mathbb{C}[x]$ που ορίζεται ως $\phi(f(x,y)) = f(x,x)$.

Πρόβλημα 5. **α)** Έστω $f(x_1,\ldots,x_n) \in K[x_1,\ldots,x_n]$, K σώμα. Δείξτε ότι το ιδεώδες $< f(x_1,\ldots,x_n) >$ είναι πρώτο ιδέωδες τού δακτυλίου $K[x_1,\ldots,x_n]$ αν και μόνον αν το πολυώνυμο $f(x_1,\ldots,x_n)$ είναι ανάγωγο πολυώνυμο τού $K[x_1,\ldots,x_n]$.
β) Δείξτε ότι στον δακτύλιο $K[x]$, K σώμα, το μηδενικό ιδέωδες $< 0 >$ είναι πρώτο ιδεώδες. Δείξτε, επίσης, ότι κάθε μή μηδενικό πρώτο ιδεώδες τού $K[x]$ είναι και μέγιστο ιδεώδες (*Υπενθύμιση:* τα ιδεώδη τού $K[x]$ είναι κύρια ιδέωδη).

Πρόβλημα 6. Έστω I ιδεώδες δακτυλίου R.
α) Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}(\mathrm{Rad}(I)) = \mathrm{Rad}(I)$.
β) Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}(I) = R \Leftrightarrow I = R$.

Πρόβλημα 7. Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^2y^3 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$.

Πρόβλημα 8. **α)** Έστω I, J ιδεώδη δακτυλίου R με $I \subseteq J$. Δείξτε ότι $\mathrm{Rad}(I) \subseteq \mathrm{Rad}(J)$.
β) Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^{100},\ y^{57} >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$. (*Υπόδειξη:* Χρήση τού α) σε συνδυασμό με το ότι το ιδεώδες $< x,y >$ είναι μέγιστο ιδεώδες τού $\mathbb{C}[x,y]$).
γ) Βρείτε το ριζικό τού ιδεώδους $< x^3+y^2-1,\ y-1 >$ στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$.

Πρόβλημα 9. Εστω $\phi : R \longrightarrow S$ *επιμορφισμός* δακτυλίων και έστω I ιδεώδες τού R.
α) Δείξτε ότι το $\phi(I)$ είναι ιδεώδες τού S.
β) Εστω $\ker\phi \subseteq I$. Δείξτε ότι το I είναι πρώτο ιδεώδες τού R εάν και μόνον εάν το $\phi(I)$ είναι πρώτο ιδεώδες τού S.

Πρόβλημα 10. Θεωρούμε τον ομομορφισμό δακτυλίων $\Phi : \mathbb{C}[x,y,z] \longrightarrow \mathbb{C}[x,y]$ που ορίζεται ως $\Phi(f(x,y,z)) = f(x,y,iy)$.
α) Δείξτε ότι ο Φ είναι επιμορφισμός δακτυλίων και βρείτε τον πυρήνα του.

β) Δείξτε ότι το ιδεώδες $< x^2 - y^2 - 1 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y]$ (*Υπόδειξη:* Χρήση τού προβλήματος 5α).
γ) Δείξτε ότι το ιδεώδες $I =< x^2 + y^2 + 2z^2 - 1,\ y + iz >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $\mathbb{C}[x, y, z]$. (*Υπόδειξη:* Χρήση τού προβλήματος 9β).