ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-13, ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Πρόβλημα 1. Έστω S ένα άπειρο υποσύνολο ενός σώματος K και έστω $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Υποθέτουμε ότι $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ για κάθε $a_i \in S$. Δείξτε τότε ότι το $f(x_1, \ldots, x_n)$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα τού $\mathbb{R}^3$ είναι αλγεβρικά:
α) $\{(t, t^2, t^3), \ \ t \in \mathbb{R}\}$.
β) $\{(\sin t, \cos t, 1), \ \ t \in \mathbb{R}\}$.
γ) Μια ευθεία στο $\mathbb{R}^3$.

Πρόβλημα 3. α) Δείξτε ότι το ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(z, w) \in \mathbb{C}^2, |z|^2 + |w|^2 = 1\}$.
β) Δείξτε ότι το ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(x, y), \ \ x \geq 0\}$.
γ) Δείξτε ότι το ακόλουθο υποσύνολο τού $\mathbb{R}^2$ δεν είναι αλγεβρικό: $\{(\cos t, \sin t, t), \ \ t \in \mathbb{R}\}$.

Πρόβλημα 4. Βρείτε δύο αλγεβρικά υποσύνολα V, W τού $\mathbb{C}^n$ των οποίων η διαφορά $V \backslash W = \{v \in V, \ \ v \notin W\}$ να μήν είναι αλγεβρικό.

Πρόβλημα 5. **α)** Βρείτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)$ τού K^3, K (άπειρο) σώμα.
β) Δείξτε ότι $\mathbb{I}(\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)) =< y - x^2, z - x^3 >$.
γ) Με χρήση του Προβλήματος 9β) τού φυλλαδίου #1, δείξτε ότι το ιδεώδες $< y - x^2, z - x^3 >$ είναι πρώτο ιδεώδες τού δακτυλίου $K[x, y, z]$.
δ) Συμπεράνατε ότι το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(< y - x^2, z - x^3 >)$ είναι ανάγωγο αλγεβρικό σύνολο.

Πρόβλημα 6. **α)** Έστω V αλγεβρικό υποσύνολο τού $\mathbb{C}^n$ και P σημείο που δεν ανήκει στο V. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F(x_1, \ldots, x_n)$ με $F(Q) = 0$, για κάθε $Q \in V$, αλλά $F(P) \neq 0$. (Υπόδειξη: Δείξτε ότι $\mathbb{I}(V \cup \{P\}) \neq \mathbb{I}(V)$).
β) Έστω $S = \{P_1, \ldots, P_r\}$ πεπερασμένο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$ και Q σημείο τού $\mathbb{C}^2$ με $Q \notin S$. Δείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $F \in \mathbb{C}[x, y]$ με $F(P_i) = 0$ για κάθε $P_i \in S$ και $F(Q) = 1$.
γ) Βρείτε αντιπαράδειγμα για τον παραπάνω ισχυρισμό στην περίπτωση που το S είναι άπειρο υποσύνολο τού $\mathbb{C}^2$.