

ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-13, ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Πρόβλημα 1. Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(x^3 + x - x^2y - y)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων του \mathbb{C}^2 .

Πρόβλημα 2. Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(x^2 - y^2, x^3 + xy^2 - y^3 - x^2y - x + y)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων του \mathbb{C}^2 .

Πρόβλημα 3. Γράψτε το αλγεβρικό σύνολο $\mathbb{V}(x^2 + y^2 - 1, x^2 - z^2 - 1)$ ως ένωση ανάγωγων αλγεβρικών υποσυνόλων του \mathbb{C}^3 .

Πρόβλημα 4. Βρείτε τα ιδιώματα των παρακάτω καμπυλών του \mathbb{C}^2 και για κάθε ένα από αυτά προσδιορίστε την τάξη του και βρείτε τις εφαπτόμενές του.

α) $y^2 = x^3 - x,$

β) $x^2 = x^4 + y^4,$

γ) $x^2y + xy^2 = x^4 + y^4.$

Πρόβλημα 5. Έστω ότι η καμπύλη f έχει στο $P = (a, b)$ ιδίωμα τάξης 2. Δείξτε ότι το P είναι απλό ιδίωμα (δηλ. η καμπύλη έχει στο P δύο διαφορετικές μεταξύ τους εφαπτόμενες) αν και μόνον αν $f_{xy}(a, b) \neq f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b)$.