ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-13, ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Πρόβλημα 1. Στον δακτύλιο $\mathbb{C}[x,y]$ θεωρούμε τα πολυώνυμα

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2y - 3xy^2 + x^2 - 3xy \\ g(x,y) &= x^3y + x^3 - 4y^2 - 3y + 1. \end{aligned}$$

α) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f,g)$ θεωρώντας τα f,g ώς στοιχεία τού $R[x]$, όπου $R=\mathbb{C}[y]$.
β) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f,g)$ θεωρώντας τα f,g ώς στοιχεία τού $R[y]$, όπου $R=\mathbb{C}[x]$.
γ) Τί συμπέρασμα βγάζετε;

Πρόβλημα 2. Έστω $f(x)\in\mathbb{C}[x]$.
α) Δείξτε ότι το f έχει ρίζα πολλαπλότητας ≥ 2 αν και μόνον αν $\mathrm{Res}(f,f')=0$.
β) Υπολογίστε την $\mathrm{Res}(f,f')$ στην περίπτωση που το f είναι δευτεροβάθμιο πολυώνυμο.
γ) Δείξτε ότι το πολυώνυμο $f(x)=6x^4-23x^3+32x^2-19x+4$ έχει διπλή ρίζα. Ποιά είναι αυτή η ρίζα;

Πρόβλημα 3. Βρείτε τις κοινές λύσεις στο $\mathbb{C}^2$ των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x(y^2-x)^2 - y^5 &= 0 \\ y^4 + y^3 - x^2 &= 0 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 4. Έστω $l=0$ ευθεία, $f=0$ καμπύλη τού $\mathbb{C}^2$ και P σημείο. Δείξτε ότι η ευθεία $l=0$ είναι εφαπτόμενη τής καμπύλης $f=0$ στο σημείο P άν και μόνον άν $I(P,f\cap l)\geq m_P(f)$.

Πρόβλημα 5. Έστω $f(x,y)$ πολυώνυμο και έστω ότι $f_x=\frac{\partial f}{\partial x}$ όχι το μηδενικό πολυώνυμο. Δείξτε ότι αν P σημείο τής καμπύλης $f(x,y)=0$ τότε $\mathrm{m}_P(f_x)\geq m_P(f)-1$.