ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2012-13, ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #5

Πρόβλημα 1. Έστω $f(x_0, x_1, x_2)$ ένα πολυώνυμο με την ιδιότητα $f(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n f(x_0, x_1, x_2)$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ (όπου $n \in \mathbb{N}$ σταθερό). Δείξτε ότι το $f(x_0, x_1, x_2)$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n.

Πρόβλημα 2. Έστω F ένα ομογενές πολυώνυμο (τριών μεταβλητών) τέτοιο ώστε να γράφεται ως $F = G \cdot H$, όπου τα G, H κάποια πολυώνυμα. Δείξτε ότι τα G, H είναι ομογενή.

Πρόβλημα 3. Έστω $F(x_0, x_1, x_2)$ ομογενές πολυώνυμο 3 μεταβλητών, βαθμού n. Δείξτε ότι

$$\sum_{i=0}^{2} x_i \frac{\partial F}{\partial x_i} = nF\,.$$

Υπόδειξη: Παραγωγίσατε, ως προς λ, την σχέση $F(\lambda x_0, \lambda x_1, \lambda x_2) = \lambda^n F(x_0, x_1, x_2)$.

Πρόβλημα 4. Περιγράψτε τις λύσεις των παρακάτω πολυωνυμικών εξισώσεων στο $\mathbb{PR}^2$.
α) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$.
β) $x_1 + x_2 = 0$
γ) $x_0x_1 + x_1x_2 + x_0x_2 = 0$.
δ) $x_1^2 + x_2^2 - x_0x_1 = 0$.
ε) $x_2^2 + x_0x_1 - x_0x_2 - x_1x_2 = 0$.

Πρόβλημα 5. Βρείτε τις κοινές λύσεις στο $\mathbb{PC}^2$ των παρακάτω εξισώσεων:

$$\begin{aligned} x_0^4 + x_1^4 - x_1^2x_2^2 &= 0 \\ x_0^4 + x_1^4 - 2x_1^3x_2 - 2x_0^2x_1x_2 - x_0x_1^2x_2 + x_1^2x_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 6. Βρείτε τα ιδιώματα τής παρακάτω καμπύλης τού $\mathbb{PC}^2$ και για κάθε ένα από αυτά προσδιορίστε την τάξη του και βρείτε τις εφαπτόμενές του.

$$x_0x_2^2 - x_1(x_1 - x_0)(x_1 - 2x_0) = 0$$

Πρόβλημα 7. Βρείτε τα σημεία τομής των παρακάτω καμπυλών στο $\mathbb{PC}^2$.

$$x_0x_1^2 - x_0x_1x_2 + x_2^3 = 0 \quad \text{και} \quad x_0^2x_1^2 + x_0^2x_2^2 + x_1x_2^3 = 0$$

Πρόβλημα 8. Βρείτε όλα τα σημεία τομής και τούς αντίστοιχους αριθμούς τομής για τα παρακάτω ζευγάρια καμπυλών τού $\mathbb{PC}^2$. Επιβεβαιώστε το θεώρημα τού Bezout.
α) $x_1^2x_2 - x_0(x_0 - 2x_2)(x_0 + x_2) = 0$ και $x_1^2 + x_0^2 - 2x_0x_2 = 0$
β) $x_1^5 - x_0(x_1^2 - x_0x_2)^2 = 0$ και $x_1^4 + x_1^3x_2 - x_0^2z_2^2 = 0$.

Πρόβλημα 9. Έστω P_1, P_2, P_3 (αντ. Q_1, Q_2, Q_3) τρία μή συνευθειακά σημεία τού προβολικού επιπέδου. Δείξτε ότι υπάρχει προβολικός μετασχηματισμός T με $T(P_i) = Q_i$, για κάθε $i = 1, 2, 3$.