

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΤΕΛΙΚΟΣ

31 Ιανουαρίου 2005, Διδάσκων: Α. Κουβιδάκης

Πρόβλημα 1. Υπολογίστε τα παρακάτω όρια ακολουθιών.

α) [Μονάδες 4]

$$\lim \frac{3n + \cos n + 1}{2n + \sin n + 2}.$$

β) [Μονάδες 7]

$$\lim \frac{3^n}{(n+1)!}.$$

Πρόβλημα 2. [Μονάδες 10] Μελετήστε ως προς την σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο

$$a_{n+1} = 3\sqrt{a_n} - 1, \text{ με } a_1 = 5.$$

Πρόβλημα 3. [Μονάδες 7] Υπολογίστε το παρακάτω όριο συνάρτησης.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x + \sqrt{x+1}}{\ln(x+1) + \sqrt{x}}.$$

Πρόβλημα 4. Συμβολίζουμε ως $[a]$ το ακέραιο μέρος του αριθμού a . Έστω

$$f(x) = \begin{cases} e^x - x, & \text{αν } x \geq 0 \\ [x+2], & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

α) [Μονάδες 4] Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 0$;

β) [Μονάδες 6] Είναι η $f(x)$ παραγωγίσιμη στο $x = 0$;

Πρόβλημα 5. [Μονάδες 8] Βρείτε σε ποιόν αριθμό συγκλίνει η σειρά:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{n+2} + 4}{5^n}.$$

Πρόβλημα 6. [Μονάδες 8] Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt{1,02}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-3} .

Πρόβλημα 7. [Μονάδες 16] Θεωρούμε την συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$f(x) = \frac{\ln|x+2|}{x+2}.$$

Να κατασκευασθεί η γραφική παράσταση τής παραπάνω συνάρτησης. Πρέπει να προσδιοριστούν επακριβώς:

- i) οι τομές με τούς άξονες των συντεταγμένων,
- ii) οι οριζόντιες και κάθετες ασύμπτωτες,
- iii) σε ποιά διαστήματα η συνάρτηση είναι αύξουσα και σε ποιά φθίνουσα,
- iv) σε ποιά διαστήματα η συνάρτηση στρέφει τα κοίλα προς τα άνω και σε ποιά προς τα κάτω.

Πρόβλημα 8. Συμβολίζουμε ως A το χωρίο το οποίο περικλείεται από τον x -άξονα και την παραβολή $y = 1 - (x - 1)^2$.

α) [Μονάδες 3] Σχεδιάστε το χωρίο A .

β) [Μονάδες 3] Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου A .

γ) [Μονάδες 6] Βρείτε τον όγκο τού στερεού το οποίο παράγεται όταν περιστρέψουμε το χωρίο A γύρω από τον y -άξονα.

Πρόβλημα 9. Να υπολογισθούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

α) [Μονάδες 6]

$$\int \frac{\sin \sqrt{t}}{\sqrt{t} \cos^2 \sqrt{t}} dt .$$

β) [Μονάδες 6]

$$\int \frac{e^x}{4e^{2x} + 9} dx .$$

γ) [Μονάδες 6]

$$\int \frac{x^3 - 18x + 29}{x^2 + 3x - 10} dx .$$