ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Ασκηση 1. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση, συμπεριλαμβανομένης και της σύγκλισης στο άπειρο, τις ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n}$.

β) $a_n = \frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

γ) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n}}{n}$.

δ) $a_n = \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}$.

ε) $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$.

στ) $a_n = \frac{2^n}{3n}$.

ζ) $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

η) $a_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.

ϑ) $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Ασκηση 2. Δείξτε ότι $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο του εγκιβωτισμού, χρησιμοποιόντας ότι $(\frac{2}{3})^n = 0$.

Ασκηση 3. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = \frac{1}{\phi(n)}$, όπου $\phi(n)$ είναι το πλήθος των διαιρετών του n (συμπεριλαμβανομένου του 1 και του n), δεν συγκλίνει.
Υπόδειξη: Βρείτε κατάλληλες υπακολουθίες που να συγκλίνουν σε διαφορετικά όρια.

Ασκηση 4. Μελετήστε ως προς την σύγκλιση την αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τον τύπο $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1$, με
α) $a_1 = 5$.
β) $a_1 = 6$.

Ασκηση 5. Να εξετασθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω ακολουθίες (a_n) με
α) $a_n = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$.
β) $a_n = \frac{3a_n^2+1}{a_n+1}$ και $a_1 = 1$.
γ) $a_n = \frac{n}{2^n}$.