

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4
(Ασκήσεις επανάληψης για τις ακολουθίες)

Ασκηση 1. Ποιές από τις παρακάτω ακολουθίες (a_n) είναι φραγμένες και ποιές όχι:

α) $a_n = \frac{3n+2}{2^n}$,

β) $a_n = \frac{\sin n + \cos^2 n}{n}$,

γ) $a_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2+1}$,

δ) $a_n = \frac{\sqrt{n^3-1}}{n}$.

Ασκηση 2. Με χρήση της ανισότητας του Bernoulli δείξτε ότι:

α) Αν $a > 0$ τότε $\lim a^{1/n} = 1$,

β) $\lim n^{1/n} = 1$.

Ασκηση 3. Δείξτε ότι

α) $\lim(\sqrt{(n+1)(n+2)} - n) = \frac{3}{2}$,

β) $\lim(\sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})) = \frac{1}{2}$,

γ) $\lim(\sqrt{n^2+3} - n) = 0$,

δ) $\lim((n+2)^{1/3} - n^{1/3}) = 0$.

Ασκηση 4. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών (a_n) με

α) $a_n = (1 + \frac{1}{3n})^n$,

β) $a_n = (1 + \frac{5}{n})^n$,

γ) $a_n = (1 - \frac{1}{n})^n$,

δ) $a_n = (1 + \frac{1}{n})^{2n}$,

ε) $a_n = (\frac{2n+1}{2n-1})^n$.

Ασκηση 5. Βρείτε το όριο της ακολουθίας (a_n) που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $a_1 = \frac{1}{4}$ και $a_{n+1} = \frac{1}{4} + a_n^2$.