ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR, ΣΕΙΡΕΣ, ΔΥΝΑΜΟΣΕΙΡΕΣ

Προσεγγίσεις

Έστω ότι τίθεται το εξής ερώτημα: Βρείτε το $\sqrt{105}$ (χωρίς όμως να χρησιμοποιήσετε κομπιουτεράκι!!). Ο επακριβής υπολογισμός της τετραγωνικής ρίζας είναι δύσκολος, είναι δυνατόν όμως να προσεγγίσουμε την ζητούμενη τιμή με κάποια γνωστή τιμή ως εξής: γνωρίζουμε τις τετραγωνικές ρίζες των φυσικών αριθμών που είναι τέλεια τετράγωνα δηλ. τις

$$\sqrt{1}=1,\ \sqrt{4}=2,\ \sqrt{9}=3,\ldots,\sqrt{81}=9,\ \sqrt{100}=10,\ \sqrt{121}=11,\ldots.$$

Από τους παραπάνω αριθμούς, των οποίων γνωρίζουμε την τετραγωνική ρίζα, πιο κοντά στο 105 είναι ο αριθμός 100 και επομένως η τετραγωνική ρίζα $\sqrt{105}$ προσεγγίζεται από την $\sqrt{100}=10$. Έχουμε λοιπόν από την μιά πλευρά την τιμή που ζητάμε δηλ. την $\sqrt{105}$ (πραγματική τιμή) την οποία όμως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε και από την άλλη την προσεγγιστική τιμή $\sqrt{100}=10$ την οποία γνωρίζουμε, δεν γνωρίζουμε όμως πόσο διαφέρει από την πραγματική τιμή. Προφανώς, δεν είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε επακριβώς την διαφορά $\sqrt{105}-\sqrt{100}=\sqrt{105}-10$ (σφάλμα της προσέγγισης) διότι τότε θα γνωρίζαμε επακριβώς και την τιμή της $\sqrt{105}$. Τό επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι αν υπάρχει τρόπος να κάνουμε μια εκτίμηση αυτής της διαφοράς δηλ. να πούμε πόσο μεγάλη μπορεί να είναι και επομένως να έχουμε ένα συμπέρασμα για το πόσο καλή είναι η προσέγγιση που έχουμε κάνει.

Για να συνοψίσουμε: Έστω ότι ζητάμε την τιμή μιας ποσότητας A την οποία όμως δεν μπορούμε να υπολογίσουμε (πραγματική τιμή). Έστω ότι με κάποιο τρόπο βρίσκουμε μια προσεγγιστική τιμή B. Τίθεται τότε το ερώτημα πόσο μεγάλο (τί τάξης μεγέθους) μπορεί να είναι το $|A-B|$ (σφάλμα προσέγγισης), δηλ. αν μπορούμε να βρούμε κάποιον (γνωστό) αριθμό M (φράγμα του σφάλματος) τέτοιον ώστε $|A-B|<M$. Όσο πιό μικρός είναι ο M που βρίσκουμε τόσο πιο σίγουροι είμαστε ότι η προσέγγιση που κάναμε είναι καλή. Προσοχή όμως: μπορεί μια προσέγγιση που κάνουμε να είναι στην πραγματικότητα καλή χωρίς όμως να είμαστε σε θέση να το αποδείξουμε δηλ. να μην μπορούμε να βρούμε ένα μικρό φράγμα για το σφάλμα. Για την εύρεση αυτού του φράγματος για το σφάλμα, υπεισέρχονται πολλές φορές κάποια δύσκολα θεωρήματα της θεωρίας των συναρτήσεων που θα εξετάσουμε παρακάτω.

Ένα από τα παραπάνω θεωρήματα είναι το θεώρημα της μέσης τιμής (ΘΜΤ). Στα επόμενα όταν αναφερόμαστε σε συναρτήσεις θα εννοούμε καλές συναρτήσεις δηλ. συναρτήσεις που είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες όσες φορές θέλουμε. Υπενθυμίζουμε ότι το ΘΜΤ διατυπώνεται ως εξής: Έστω $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση. Τότε υπάρχει $c\in(a,b)$ με την ιδιότητα $f(b)=f(a)+f'(c)(b-a)$. Σημειώνουμε ότι το θεώρημα δίδει μόνο την ύπαρξη του c και όχι την κατασκευή του. Εφαρμόζουμε το ΘΜΤ για $f(x)=\sqrt{x}$, $a=100$, $b=105$. Τότε έχουμε ότι $\sqrt{105}-\sqrt{100}=f'(c)\cdot 5$, δηλ. (μια και $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$) έχουμε $\sqrt{105}-10=\frac{5}{2\sqrt{c}}$. Το c δεν το γνωρίζουμε επακριβώς, έχουμε όμως την πληροφορία ότι $c\in(100,105)$. Συμπεραίνουμε ότι το σφάλμα $=\frac{5}{2\sqrt{c}}<\frac{5}{2\sqrt{100}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}=0.25$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το ΘΜΤ βρήκαμε ένα φράγμα $M=\frac{1}{4}=0.25$ για το σφάλμα που κάναμε προσεγγίζοντας την $\sqrt{105}$ με το 10. Χρησιμοποιώντας τώρα ένα κομπιουτεράκι βλέπουμε ότι $\sqrt{105}=10,24695057\ldots$ και συνεπώς το σφάλμα προσέγγισης είναι $0.24695057\ldots$. Επομένως, από την μια πλευρά η προσέγγιση είναι σχετικά καλή, από δε την άλλη το φράγμα που βρήκαμε για το σφάλμα σε αυτήν την περίπτωση είναι αρκετά καλό δηλ. είναι κοντά στην πραγματική τιμή του σφάλματος. Βεβαια αν δεν είχαμε το κομπιουτεράκι, αυτό δεν θα το γνωρίζαμε, το μόνο που θα γνωρίζαμε είναι ότι η προσεγγιστική τιμή διαφέρει από την πραγματική τιμή το πολύ κατα 0.25.

Χρησιμοποιώντας τώρα την παρακάτω γενίκευση του ΘΜΤ μπορούμε να βρούμε ένα ακόμη καλύτερο (μικρότερο) φράγμα για το σφάλμα της προσέγγισης. Έστω $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ μια (καλή) συνάρτηση. Τότε υπάρχει $c \in (a,b)$ με την ιδιότητα $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(c)}{2!}(b-a)^2$. Εφαρμόζοντας αυτή την πρόταση για την συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 100$, $b = 105$ παίρνουμε ότι $\sqrt{105} = \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}}5 + \frac{-1}{4c^{3/2}}5^2$, δηλ. $\sqrt{105} = 10 + \frac{1}{4} + \frac{-25}{4c^{3/2}}$. Συνεπώς προσεγγίζουμε την $\sqrt{105}$ με το $10 + \frac{1}{4} = 10,25$ και γνωρίζουμε ότι το σφάλμα της προσέγγισης (σε απόλυτη τιμή) γράφεται στην μορφή $\frac{25}{4c^{3/2}}$. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι $c \in (100,105)$ έχουμε $\frac{25}{4c^{3/2}} < \frac{25}{4\cdot 10^3} = \frac{1}{160}$. Άρα με αυτή την προσέγγιση, η προσεγγιστική τιμή διαφέρει από την πραγματική τιμή το πολύ κατα $\frac{1}{160}$ και συνεπώς η προσέγγιση μας είναι πολύ καλή. Το Θεώρημα Taylor στο οποίο θα αναφερθούμε παρακάτω είναι μια περαιτέρω γενίκευση του ΘΜΤ και μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε ακόμη καλύτερες προσεγγίσεις.

Το πολυώνυμο Taylor μιας συνάρτησης

Έστω ότι δίδεται συνάρτηση f και έστω a ένα (εσωτερικό) σημείο του πεδίου ορισμού της. Θέτουμε το εξής ερώτημα: Από όλα τα πολυώνυμα βαθμού n ποιό πολυώνυμο προσεγγίζει καλύτερα την συνάρτηση f σε μια γειτονιά του σημείου a. Το πολυώνυμο που ζητάμε θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν περισσότερα κοινά χαρακτηριστικά με την συνάρτηση f γύρω από το σημείο a. Έχουμε δεί ότι η γεωμετρία της συνάρτησης σε ένα σημείο συσχετίζεται με τις τιμές των παραγώγων της (1ης, 2ης κ.ο.κ. τάξης) στο συγκεκριμμένο σημείο. Ζητάμε λοιπόν ένα πολυώνυμο $P_n^a(x)$ βαθμού n με την ιδιότητα ${P_n^a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, για όσο το δυνατόν περισσότερες τιμές του k. Είναι εύκολο να δούμε ότι για ένα πολυώνυμο $P_n^a(x)$ βαθμού n ισχύει πάντα ότι ${P_n^a}^{(k)}(x) = 0$, για κάθε $k \geq n+1$. Συνεπώς το βέλτιστο που μπορούμε να ζητήσουμε είναι ${P_n^a}^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, για κάθε $k = 0, \dots, n$.

Γράφουμε το πολυώνυμο $P_n^a(x)$ που ζητάμε σε δυνάμεις του $(x-a)$, δηλ. στην μορφή $P_n^a(x) = a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n$. Αυτό επιτυγχάνεται με διαδοχικές διαιρέσεις του πολυωνύμου με το $(x-a)$. Παρατηρούμε μετά ότι ${P_n^a}^{(k)}(x) = k!a_k + (x-a)Q_{n-k}(x)$, για κάθε $k = 0, \dots, n$, όπου $Q_{n-k}(x)$ κάποιο πολυώνυμο βαθμού $n-k$. Αυστηρή απόδειξη αυτού μπορεί να γίνει με επαγωγή ως προς το k. Θα πρέπει επομένως, $f^{(k)}(a) = {P_n^a}^{(k)}(a) = k!a_k + (a-a)Q_{n-k}(a) = k!a_k$ και συνεπώς $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$. Άρα το ζητούμενο πολυώνυμο βαθμού n είναι το

$$P_n^a(x) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Το παραπάνω πολυώνυμο λέγεται το πολυώνυμο Taylor βαθμού n, κέντρου a, για την συνάρτηση f.

Το θεώρημα του Taylor

Έστω f μια (καλή) συνάρτηση και έστω a ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε για κάθε x κοντά στο a, με π.χ. $x < a$, το διάστημα $[x, a]$ είναι στο πεδίο ορισμού και επομένως εφαρμόζοντας το ΘΜΤ έχουμε ότι

$$f(x) = f(a) + f'(c)(x - a),$$

γιά κάποιο c στο ανοικτό διάστημα που ορίζουν τα x και a. Ομοίως, η προαναφερθείσα γενίκευση του ΘΜΤ διατυπώνεται ως εξής: για κάθε x κοντά στο a έχουμε

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(c')}{2!}(x - a),$$

γιά κάποιο c' στο ανοικτό διάστημα που ορίζουν τα x και a. Παρατηρούμε τώρα ότι το ΘΜΤ και η γενίκευσή του διατυπώνονται και ως εξής: για κάθε x κοντά στο a έχουμε

$$\begin{aligned} f(x) &= P_0^a(x) + f'(c)(x - a), \\ f(x) &= P_1^a(x) + \frac{f''(c')}{2!}(x - a), \end{aligned}$$

γιά κάποια c, c' στο ανοικτό διάστημα που ορίζουν τα x και a, όπου $P_0^a(x)$, $P_1^a(x)$ είναι τα αντίστοιχα πολυώνυμα Taylor για την συνάρτηση f. Το θεώρημα Taylor, που αποτελεί γενίκευση των παραπάνω, είναι το παρακάτω:

Θεώρημα 1 (Θεώρημα Taylor). *Έστω f μια (καλή) συνάρτηση και έστω a ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της. Τότε για κάθε x κοντά στο a έχουμε*

$$\begin{aligned} f(x) &= P_n^a(x) + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \\ &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}, \end{aligned}$$

γιά κάποιο c στο ανοικτό διάστημα που ορίζουν τα x και a (που η επιλογή του εξαρτάται από τα x, δηλ. $c = c(x)$).

Ο όρος $R_n^a(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1}$ λέγεται *υπόλοιπο Taylor* βαθμού n, κέντρου a, για την συνάρτηση f. Επομένως, το θεώρημα Taylor γράφεται ως ακολούθως:

$$f(x) = P_n^a(x) + R_n^a(x),$$

όπου $P_n^a(x)$ είναι το πολυώνυμο Taylor βαθμού n, κέντρου a, για την συνάρτηση f και $R_n^a(x)$ είναι το αντίστοιχο υπόλοιπο Taylor. Σημειώνουμε ότι ο όρος $f^{(n+1)}(c)$ που εμφανίζεται στο υπόλοιπο Taylor είναι συνάρτηση του x και όχι μια σταθερά, διαφορετικά κάθε συνάρτηση θα γραφόταν τοπικά ως πολυώνυμο βαθμού $n + 1$, για οποιοδήποτε $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Το παραπάνω θεώρημα ουσιαστικά δίδει μια έκφραση της διαφοράς $f(x) - P_n^a(x)$. Έχοντας μια 'δύσκολη' συνάρτηση $f(x)$ μπορούμε να την προσεγγίσουμε με το πολυώνυμο Taylor $P_n^a(x)$ (που είναι μια εύκολη συνάρτηση) και επομένως το θεώρημα δίδει μια έκφραση για το σφάλμα της προσέγγισης.

Παράδειγμα 1. $f(x) = \sin x$. Γράφουμε το παραπάνω θεώρημα για $n = 3$ με κέντρο $a = 0$. Έχουμε, $P_3^0(x) = 0 + x + 0 - \frac{1}{6}x^3$. Επίσης, $R_3^0(x) = \frac{\sin c}{24}x^4$, για κάποιο c μεταξύ του 0 και του x. Συνεπώς,

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{\sin c}{24}x^4.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, μπορούμε για παράδειγμα να προσεγγίσουμε το $\sin 0.1$ με το $P_3(0.1) = 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6}$ και το σφάλμα της προσέγγισης θα γράφεται στην μορφή $\frac{\sin c}{24}(0.1)^4$, γιά κάποιο $c \in (0, 0.1)$. Άρα μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα του σφάλματος $\frac{\sin c}{24}(0.1)^4 < \frac{1}{24 \cdot 10^4} = \frac{1}{240.000}$.

Σειρές (αθροίσματα με άπειρους όρους)

Γνωρίζουμε να αθροίζουμε πεπερασμένους το πλήθος αριθμούς. Το ερώτημα που τιθεται είναι αν μπορούμε να δώσουμε νόημα στην άθροιση απείρων το πλήθος αριθμών. Πολλές φορές τέτοιου είδους αθροίσματα περιμένεις να είναι πεπερασμένα. Για παράδειγμα, το άθροισμα $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \cdots$ περιμένουμε να κάνει 1 (διότι προκύπτει από τις διαδοχικές υποδιαιρέσεις τις μονάδος). Από την άλλη μεριά, το άθροισμα $1 + 1 + 1 + \cdots$ περιμένουμε να κάνει άπειρο. Πρέπει λοιπόν να βρούμε έναν αυστηρό ορισμό της παραπάνω διαδικασίας, που να είναι συμβατός με τις διαισθητικές μας προβλέψεις. Εδώ υπεισέρχονται πάλι οι ακολουθίες και τα όριά τους. Έστω (a_n) μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Ονομάζουμε το σύμβολο $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, ή διαφορετικά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, (άπειρη) σειρά και το ορίζουμε ως ακολούθως. Θεωρούμε την ακολουθία (s_n) που ορίζεται από τον αναδρομικό τύπο $s_1 = a_1$ και $s_n = s_{n-1} + a_n$. Δηλ. την ακολουθία (s_n) με

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & a_1 \\ s_2 & = & a_1 + a_2 \\ s_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ \cdots & & \cdots \\ s_n & = & a_1 + a_2 + \cdots + a_n \end{array}$$

Ορισμός 1. *Ορίζουμε την (άπειρη) σειρά $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$, ή διαφορετικά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ως το όριο $\lim s_n$.*

Σημειώνουμε επομένως ότι αν δωθεί μια σειρά $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ τότε με αυτήν σχετίζονται δύο ακολουθίες. Η μια είναι η ακολουθία (a_n), που λέγεται *η ακολουθία των όρων της σειράς* και η άλλη είναι η ακολουθία (s_n), που λέγεται *η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της σειράς*. Αν τώρα $\lim s_n = L \in \mathbb{R}$ τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει (στο L) και γράφουμε $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = L$, διαφορετικά ότι η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 2. Θα μελετήσουμε την προαναφερθείσα σειρά $1/2+1/4+1/8+1/16+\cdots$ δηλ. την $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$. Έχουμε ότι $s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n}$ και ζητάμε το $\lim s_n$. Θα κάνουμε εδώ χρήση του τύπου του γεωμετρικού αθροίσματος. Έστω a πραγματικός αριθμός με $a \neq 1$. Τότε

$$1 + a^1 + a^2 + \cdots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

Επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n} \\ &= (\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+\cdots+(\frac{1}{2})^n \\ &= \frac{1}{2}\left(1+(\frac{1}{2})^1+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^{n-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}}=1-(\frac{1}{2})^n. \end{aligned}$$

Άρα $\lim s_n = \lim(1-(\frac{1}{2})^n)=1$ που είναι αυτό που αναμέναμε.

Παράδειγμα 3. Θα μελετήσουμε την σειρά $1+1+1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}1$. Έχουμε $s_n=n$ και άρα $\lim s_n=+\infty$. Επομένως η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 4. Θα μελετήσουμε την σειρά $1-1+1-1+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$. Έχουμε $s_n=1$, αν n περιττός και $s_n=0$, αν n άρτιος. Αρα το $\lim s_n$ δεν υπάρχει και επομένως η σειρά αποκλίνει.

Παράδειγμα 5. Θα μελετήσουμε την σειρά $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$. Έχουμε $s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}$. Για αυτό το άθροισμα δεν μπορούμε να βρούμε έναν κλειστό τύπο όπως κάναμε για το γεωμετρικό άθροισμα του παραδείγματος 2. Θα δείξουμε όμως ότι η ακολουθία (s_n) δεν έχει όριο, βρίσκοντας μιά υπακολουθίας της που αποκλίνει. Πράγματι, πάρε την υπακολουθία (s'_n) με $s'_n=s_{2^n}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} s'_1 &= 1+\frac{1}{2}\geq 1+\frac{1}{2} \\ s'_2 &= s'_1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\geq 1+\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1+2\frac{1}{2} \\ s'_3 &= s'_2+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\geq 1+2\frac{1}{2}+4\frac{1}{8}=1+3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Και γενικότερα, δείχνουμε με επαγωγή, ότι $s'_n \geq 1+n\frac{1}{2}=1+\frac{n}{2}$. Επομένως το s'_n γίνεται όσο μεγάλο θέλουμε και άρα $\lim s'_n=+\infty$ και συνεπώς η ακολουθία (s_n) αποκλίνει. Επομένως και η σειρά αποκλίνει.

Σημειώνουμε τέλος ότι, αν και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ κατασκευάζεται από την ακολουθία (a_n), η μελέτη της είναι κυρίως συνηφασμένη με την ακολουθία (s_n) των μερικών της αθροισμάτων. Ουσιαστικά, μόνον η παρακάτω πρόταση συσχετίζει την ακολουθία των όρων της (a_n) με την σύγκλιση της σειράς.

Πρόταση 1. *Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ συγκλίνει τότε η ακολουθία (a_n) έχει όριο το μηδέν. Επομένως, αν $\lim a_n\neq 0$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ αποκλίνει.*

Απόδειξη. Έστω (s_n) η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων. Τότε $a_n=s_n-s_{n-1}$. Η σειρά συγκλίνει επομένως έχουμε ότι $\lim s_n=L\in\mathbb{R}$. Τότε όμως και $\lim s_{n-1}=L$ και συνεπώς $\lim a_n=L-L=0$. □

Παράδειγμα 6. Οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty}1$ και $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ αποκλίνουν διότι η ακολουθία των όρων τους δεν συγκλίνει στο μηδέν.

Το αντίστροφο όμως της παραπάνω πρότασης δεν ισχύει. Για παράδειγμα είδαμε ότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ αποκλίνει (βλ. παράδειγμα 5), όμως η ακολουθία των όρων της είναι η $(\frac{1}{n})$ που έχει όριο το μηδέν.

Δυναμοσειρές ('πολυώνυμα' με άπειρους όρους)

Έστω ότι δίδεται μια ακολουθία (a_n). Τότε μπορούμε να σχηματίσουμε το παρακάτω 'τυπικό πολυώνυμο του x με άπειρους όρους '

$$s(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Ένα τέτοιο 'τυπικό πολυώνυμο του x με άπειρους όρους ' λέγεται δυναμοσειρά του x. Βέβαια, μέχρι στιγμής, αυτός είναι ένας 'τυπικός ' ορισμός και δεν έχει ακόμη αποκτήσει κάποιο νόημα. Όταν όμως δώσουμε στην μεταβλητή x μια συγκεκριμμένη τιμή, δηλ. θέσουμε $x = x_0$, τότε η παραπάνω δυναμοσειρά γίνεται η σειρά $a_0 + a_1 x_0 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ και επομένως αποκτά νόημα, δηλ. είναι η σειρά που αντιστοιχεί στην ακολουθία $(a_n x_0^n)$. Ορίζουμε τώρα ως πεδίο σύγκλισης (ή πεδίο ορισμού) A της παραπάνω δυναμοσειράς το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών x_0 για τους οποίους η αντίστοιχη σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ συγκλίνει. Με αυτό τον τρόπο επάγεται μια συνάρτηση $s : A \longrightarrow \mathbb{R}$ με $x_0 \to s(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$.

Με ανάλογο τρόπο, αν $a \in \mathbb{R}$, ορίζουμε μια δυναμοσειρά του $(x - a)$ να είναι το 'τυπικό πολυώνυμο του $x - a$ με άπειρους όρους '

$$s(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

και, ομοίως, ορίζουμε το πεδίο πεδίο σύγκλισης (ή πεδίο ορισμού) της παραπάνω δυναμοσειράς.

Παράδειγμα 7. Έστω $s(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Ας βρούμε το πεδίο σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς, δηλ. ας βρούμε όλους τους πραγματικούς αριθμούς x_0 για τους οποίους η σειρά $s(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} x_0^n$ συγκλίνει. Η ακολουθία $(s_n(x_0))$ των μερικών αθροισμάτων της σειράς έχει γενικό όρο

$$s_n(x_0) = 1 + x_0 + \cdots + x_0^{n-1} = \frac{1 - x_0^n}{1 - x_0}\ .$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει στην περίπτωση που $x_0 \neq 1$. Σημειώνουμε πρώτα ότι αν $x_0 = 1$ τότε $s(1) = 1+1+1+\cdots+1+\cdots$ που αποκλίνει. Για τις υπόλοιπες τιμές του x_0, η σύγκλιση της σειράς $s(x_0)$ εξαρτάται από την ύπαρξη του ορίου $\lim x_0^n$. Όπως έχουμε δεί, αυτό το όριο υπάρχει (και είναι μηδέν) μόνον όταν $|x_0| < 1$. Επομένως, πεδίο σύγκλισης της παραπάνω δυναμοσειράς είναι το $A = (-1, 1)$. Επίσης, η αντίστοιχη τιμή της δυναμοσειράς για ένα $x_0 \in A$ θα είναι $s(x_0) = \frac{1}{1-x_0}$ και συνεπώς η επαγόμενη συνάρτηση που ορίζει αυτή η δυναμοσειρά είναι η $s : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ με $s(x) = \frac{1}{1-x}$. Συνεπώς, για κάθε x με $-1 < x < 1$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

Επομένως, για x με $-1 < x < 1$, γράψαμε την συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ως δυναμοσειρά του x, δηλ. ως ένα 'πολυώνυμο' του x με άπειρους όρους!!.

Παράδειγμα 8. Συνεχίζοντας το παραπάνω παράδειγμα, θα προσπαθήσουμε να γράψουμε τώρα την συνάρτηση $\frac{1}{1-x}$ ως δυναμοσειρά του $x-a$, όπου $a \neq 1$. Έχουμε κατ' αρχάς ότι

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-\frac{x-a}{1-a}} = \frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-x'},$$

όπου $x' = \frac{x-a}{1-a}$. Από το παραπάνω παράδειγμα γνωρίζουμε ότι αν $|x'| < 1$, δηλ. αν $|\frac{x-a}{1-a}| < 1$, τότε

$$\frac{1}{1-x'} = 1 + x' + x'^2 + \cdots + x'^n + \cdots.$$

Επομένως, για x με $|\frac{x-a}{1-a}| < 1$, δηλ. $|x-a| < |1-a|$, ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-a}\,\frac{1}{1-x'} &= \frac{1}{1-a}\left(1 + (\frac{x-a}{1-a}) + (\frac{x-a}{1-a})^2 + \cdots + (\frac{x-a}{1-a})^n + \cdots\right)\\ &= \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}} + \cdots\end{aligned}$$

και επομένως

$$\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-a} + \frac{x-a}{(1-a)^2} + \frac{(x-a)^2}{(1-a)^3} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{(1-a)^{n+1}} + \cdots$$

για κάθε x με $|x-a| < |1-a|$.

Δυναμοσειρά Taylor μιας συνάρτησης

Με αφορμή τα τελευταία παραδείγματα, θέτουμε το εξής γενικότερο ερώτημα. Έστω f μια 'καλή' συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f. Μπορούμε τότε να βρούμε μια γειτονιά A του σημείου, τέτοια ώστε για κάθε $x \in A$ η συνάρτηση f να γράφεται ως δυναμοσειρά του $x-a$; Η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική (γιά όλες βέβαια τις 'καλές ' συναρτήσεις). Το επακόλουθο φυσιολογικό ερώτημα είναι τότε ποιά είναι αυτή η δυναμοσειρά; Η απάντηση είναι ότι η ζητούμενη δυναμοσειρά είναι αυτή που προκύπτει ως η γενίκευση του πολυωνύμου Taylor της f με κέντρο a. Πρίν περάσουμε σε μια πιο συστηματική μελέτη των παραπάνω ερωτημάτων, προσπαθήστε να επιβεβαιώστε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{1-x}$, βλ. παράδειγμα 8. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 2. *Έστω f μια 'καλή' συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της f. Ορίζουμε σειρά Taylor της f με κέντρο a, την κάτωθι δυναμοσειρά ως προς $x-a$:*

$$\begin{aligned}T_f^a(x) &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.\end{aligned}$$

Όταν $a = 0$, η παραπάνω δυναμοσειρά, $T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} x^n$, λέγεται σειρά McLauren της συνάρτησης f.

Τα μερικά αθροίσματα της παραπάνω σειράς για $x = x_0$ είναι τα $s_n(x_0) = P_n^a(x_0)$. Επομένως

$$T_f^a(x_0) = \lim P_n^a(x_0).$$

Από το θεώρημα 1 έχουμε ότι $f(x_0) = P_n^a(x_0) + R_n^a(x_0)$. Επομένως Θα ισχύει ότι $f(x_0) = T_f^a(x_0) = \lim s_n(x_0) = \lim P_n^a(x_0)$ αν και μόνον αν $\lim R_n^a(x_0) = 0$. Αποδεικνύεται τώρα ότι, για τις καλές συναρτήσεις, το τελευταίο ισχύει για όλα τα x_0 σε μια γειτονιά του σημείου a και συνεπώς έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2. *Αν f μια καλή συνάρτηση και a εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, τότε υπάρχει γειτονια U του a, τέτοια ώστε για κάθε $x \in U$ να ισχύει ότι*

$$\begin{aligned} f(x) &= T_f^a(x) \\ &= f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots \end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι η εύρεση της γειτονιάς αντιστοιχεί ουσιαστικά στο ερώτημα, για ποια x_0 ισχύει ότι $\lim R_n^a(x_0) = 0$. Επίσης, αποδεικνύεται ότι η παραπάνω δυναμοσειρά είναι μοναδική, δηλ. η συνάρτηση f δεν μπορεί να γραφεί με διαφορετικό από τον παραπάνω τρόπο ως δυναμοσειρά του $(x-a)$ σε γειτονιά του a.

Παράδειγμα 9. $f(x) = \sin x$. Ας υπολογίσουμε την σειρά McLaurent $T_f(x)$ της συνάρτησης f. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f^{4k}(x) &= \sin x, \text{ άρα } f^{4k}(0) = 0 \\ f^{4k+1}(x) &= \cos x, \text{ άρα } f^{4k+1}(0) = 1 \\ f^{4k+2}(x) &= -\sin x, \text{ άρα } f^{4k+2}(0) = 0 \\ f^{4k+3}(x) &= -\cos x, \text{ άρα } f^{4k+3}(0) = -1 \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} T_f(x) &= 0 + \frac{1}{1!}x + 0\,x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0\,x^4 + \frac{1}{5!}x^5 + 0\,x^6 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots \\ &= \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{(2\lambda+1)!}\, x^{2\lambda+1}. \end{aligned}$$

Για να βρούμε τώρα για ποιά $x = x_0$ γύρω από το 0 έχουμε ότι $f(x_0) = T_f(x_0)$ θα πρέπει να βρούμε τα x_0 για τα οποία ισχύει ότι $\lim R_n^a(x_0) = 0$. Έχουμε

$$|R_n^a(x_0)| = |\frac{f^{n+1}(c)}{(n+1)!}\, x_0^{n+1}| \leq \frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Όμως, $\lim \frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$, για οποιαδήποτε επιλογή του x_0. Συνεπώς,

$$\sin x = \sum_{\lambda=0}^{\infty}(-1)^\lambda \frac{1}{(2\lambda+1)!}\, x^{2\lambda+1},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.