

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009-10
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ # 11

Άσκηση 1. Βρείτε τον όγκο του στερεού στο 1^ο ογδοημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα συντεταγμένων, τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και το επίπεδο $z + y = 3$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα

$$\int_{x=0}^{x=\sqrt{2}} \int_{y=0}^{y=\sqrt{2-x^2}} \int_{z=x^2+y^2}^{z=2} x \, dz \, dy \, dx$$

Άσκηση 3. Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x, y, z) = xy^2z^3$ πάνω στο τριδιάστατο χωρίο που φράσσεται από την επιφάνεια $z = xy$ και τα επίπεδα $x = y$, $x = 1$ και $z = 0$.

Άσκηση 4. Βρείτε τον όγκο του στερεού που φράσσεται από τα παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = 2 - x^2 - y^2$.

Άσκηση 5. Βρείτε τον όγκο του στερεού στο 1^ο ογδοημόριο που φράσσεται από τα επίπεδα συντεταγμένων και τα επίπεδα $x + z = 1$ και $y + 2z = 2$.

Άσκηση 6. Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίδονται από:

- α) $(-3, \pi)$.
- β) $(2, -\pi/3)$.
- γ) $(-3, -\pi/4)$.
- δ) $(-\sqrt{2}, \pi/4)$.
- ε) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$.

Άσκηση 7. Σχεδιάστε το σύνολο των σημείων του επιπέδου το οποίο, σε πολικές συντεταγμένες (r, θ) , ορίζεται από:

- α) $1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- β) $-2 \leq r \leq -1, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- γ) $r \geq 0, \theta = \pi$.
- δ) $r \leq 0, \theta = \pi/2$.
- ε) $r \cos \theta = 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- στ) $r \sin \theta = 2, 0 \leq \theta \leq \pi$.
- ζ) $r \cos \theta = 2, \pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
- η) $r = 2 + \cos \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- θ) $r = -1 + \sin \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.
- ι) $r = \sin 2\theta, 0 \leq \theta \leq \pi$.

Άσκηση 8. Με χρήση πολικών συντεταγμένων, υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(x, y)$ με πεδίο ολοκλήρωσης το χωρίο S :

α) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $S =$ ο μοναδιαίος δίσκος κέντρου $(0, 0)$.

β) $f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, $S =$ ο κυκλικός δακτύλιος που βρίσκεται ανάμεσα στους κύκλους $x^2 + y^2 = 1$ και $x^2 + y^2 = e^2$.

Άσκηση 9. Με χρήση πολικών συντεταγμένων υπολογίστε τα ολοκληρώματα:

α)

$$\int_{y=-1}^{y=1} \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\sqrt{1-y^2}} x^2 + y^2 \, dx dy .$$

β)

$$\int_{y=0}^{y=2} \int_{x=0}^{x=y} x \, dx dy .$$

γ)

$$\int_{x=0}^{x=3} \int_{y=0}^{y=\sqrt{3}x} \frac{1}{x^2 + y^2} \, dy dx .$$

Άσκηση 10. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την καμπύλη $r = 1 + \cos \theta$.

Σημείωση: Οι ασκήσεις 6 - 10 αφορούν την ύλη που θα διδαχθεί στο μάθημα της Τρίτης 11 Μαΐου.