

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009-10
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ # 12

Άσκηση 1. Βρείτε το εμβαδόν του χωρίου στο πρώτο τεταρτημόριο του επιπέδου που φράσσεται κάτω από τον x -άξονα, δεξιά από την καμπύλη $r = 1 + \cos\theta$ και αριστερά από την καμπύλη $r = \sin\theta$ (όπου r, θ είναι οι πολικές συντεταγμένες στο επίπεδο).

Άσκηση 2. Με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων βρείτε τον όγκο του στερεού (κλειστό φραγμένο χωρίο) που φράσσεται από το επίπεδο $z = 1$ και την επιφάνεια $z = 4 - x^2 - y^2$.

Άσκηση 3. Χρησιμοποιώντας κυλινδρικές συντεταγμένες υπολογίστε τον όγκο του στερεού που βρίσκεται στο εσωτερικό του κυλίνδρου $x^2 + y^2 = 1$ και φράσσεται από το επίπεδο $x + y + z = -1$ και το παραβολοειδές $z = 4 - x^2 - y^2$.

Άσκηση 4. Με χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων βρείτε τον όγκο του στερεού που ορίζεται από:

α) Περιβάλλεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και βρίσκεται ανάμεσα στο επίπεδο $z = -1$ και το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

β) Περιβάλλεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 1$ και βρίσκεται ανάμεσα στα παραβολοειδή $z = x^2 + y^2$ και $z = x^2 + y^2 + 1$.

γ) Φράσσεται πάνω από το παραβολοειδές $z = 5 - x^2 - y^2$ και κάτω από το παραβολοειδές $z = 4x^2 + 4y^2$.

δ) Φράσσεται πάνω από την σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και κάτω από το παραβολοειδές $z = x^2 + y^2$.

Άσκηση 5. Το επίπεδο $z = 1$ χωρίζει την σφαίρα κέντρου $(0, 0, 0)$ και ακτίνας 1 σε δύο κομμάτια. Βρείτε τον όγκο των παραπάνω κομματιών με χρήση

α) κυλινδρικών συντεταγμένων.

β) σφαιρικών συντεταγμένων.

Άσκηση 6. Βρείτε τον όγκο του στερεού που σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, ϕ, θ) περιγράφεται ως εξής: βρίσκεται μέσα στην σφαίρα $\rho = 2$ και ανάμεσα στους κώνους $\phi = \pi/3$ και $\phi = 2\pi/3$.

Άσκηση 7. Ολοκληρώστε την συνάρτηση $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ με πεδίο ολοκλήρωσης το χωρίο που βρίσκεται ανάμεσα στις σφαίρες $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ και $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Σημείωση: Οι ασκήσεις 5β, 6 και αφορούν την ύλη που θα διδαχθεί στο μάθημα της Τρίτης 18 Μαΐου.