

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009-10
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ # 2

Άσκηση 1. Έστω \vec{v} και \vec{w} διανύσματα του \mathbb{R}^n . Δείξτε ότι

α) $2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$.

β) $\|\vec{v} - \vec{w}\| \cdot \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

γ) $4\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα γινόμενα πινάκων

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ -1/3 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Άσκηση 3. Γράψτε τους 2×2 πίνακες $A = (a_{ij})$ και $B = (b_{ij})$ με στοιχεία

$$a_{ij} = i - j \quad \text{και} \quad b_{ij} = \frac{1}{j}$$

και υπολογίστε το άθροισμα $A + B$ και τα γινόμενα AB , BA και A^2 .

Άσκηση 4. Θεωρούμε τους πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

α) Βρείτε έναν 2×2 πίνακα C με την ιδιότητα $AC = I_2$.

β) Ισχύει ότι $AB = BA$?

Άσκηση 5. Υπολογίστε τις ορίζουσες

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Άσκηση 6. Για ποιές τιμές του λ η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 3 - \lambda & 2 & -2 \\ -3 & -1 - \lambda & 3 \\ 1 & 2 & -\lambda \end{bmatrix}$$

είναι ίση με μηδέν?