

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009-10
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ # 4

Άσκηση 1. Βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν:

- α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x+1}$.
β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4 + y^4}$.
γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4 + y^4}$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = ye^x + \sin x + (xy)^4$ είναι συνεχής.

Άσκηση 3. Εστω $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, όπου $(x, y) \neq (0, 0)$. Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $(0, 0)$?

Άσκηση 4. Εστω $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$, όπου $(x, y) \neq (0, 0)$. Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $(0, 0)$?

Άσκηση 5. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ στο σημείο $(1, 2)$.

- α) $f(x, y) = xe^{1+x^2y}$.
β) $f(x, y) = \cos(xy^2)$.
γ) $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.
δ) $f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + 2y^4}$.
ε) $f(x, y) = \log \sqrt{1 + xy}$.
στ) $f(x, y) = x/y$.
ζ) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.
η) $f(x, y) = \tan(\pi x + 2\pi y)$.
θ) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy+1}$.

Άσκηση 6. Βρείτε την εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στα γραφήματα των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία:

- α) $z = (x^2 + y^3)$ στο σημείο $(3, 1, 10)$.
β) $z = xy$ στο σημείο $(-1, -1, 1)$.

Άσκηση 7. Βρείτε τα σημεία του γραφήματος της συνάρτησης $z = x^2 - 5x + y^2 - 7$ στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο με το xy -επίπεδο.

Άσκηση 8. Εστω $f(x, y)$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^3 + y^3}, & \text{για } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- α) Δείξτε ότι η $f(x, y)$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.
β) Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο σημείο $(0, 0)$.

γ) Είναι η συνάρτηση $\frac{\partial f}{\partial x}$ συνεχής στο σημείο $(0,0)$?

Σημείωση: Οι ασκήσεις 5, 6, 7 και 8 αφορούν την ύλη που θα διδαχθεί στο μάθημα τής Τρίτης 9 Μαρτίου.