

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2009-10
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑΣ # 8

Άσκηση 1. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία και ως προς τις δοσμένες κατευθύνσεις:

α) $f(x, y) = x + 2xy - 3y^2$, $P = (1, 2)$, $\vec{v} = \langle 3/5, 4/5 \rangle$.

β) $f(x, y) = e^x \cos(\pi y)$, $P = (0, -1)$, $\vec{v} = \langle -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \rangle$.

γ) $f(x, y) = x^y$, $P = (e, e)$, $\vec{v} = \langle 5/13, 12/13 \rangle$.

Άσκηση 2. Για μια καμπύλη $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ με $\sigma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ορίζουμε ως διάνυσμα επιτάχυνσης το $\vec{\sigma}''(t) = \langle x_1''(t), \dots, x_n''(t) \rangle$. Βρείτε το διάνυσμα τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στον χρόνο $t = 1$ τής καμπύλης που ορίζεται ως

$$\sigma(t) = \left(1 + t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3}\right).$$

Άσκηση 3. Θεωρούμε την καμπύλη που ορίζεται ως

$$\sigma(t) = (1, 5 \cos t, 3 \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Βρείτε για ποιές τιμές τού t το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης.

Άσκηση 4. Θεωρούμε την καμπύλη $\sigma(t)$ με την ιδιότητα ότι η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t έχει σταθερή τιμή c (δηλ. το $|\vec{\sigma}'(t)| = c$, για κάθε t). Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης σε κάθε χρονική στιγμή t .

Άσκηση 5. Υπολογίστε το μήκος τόξου των παρακάτω καμπύλων:

α) $\sigma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (t, t \sin t, t \cos t)$.

β) $\sigma : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (2t, t, t^2)$.

Άσκηση 6. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.

β) $f(x, y) = xy + yx^5 + xy^5$.

γ) $f(x, y) = \cos(x + y)$.

δ) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$.

ε) $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$.

στ) $f(x, y) = x^2 + 2xy$.

Άσκηση 7. Έστω $f(x, y) = ax^2 + by^2$, όπου a, b σταθερές. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία τής f και εξετάστε τότε είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Άσκηση 8. Για κάθε μια από τις περιπτώσεις της άσκησης 6, εφαρμόστε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου και βρείτε σε ποιά από τα κρίσιμα σημεία η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο.

Άσκηση 9. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$ στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $y = 2$, $y = 2x$.

Άσκηση 10. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$ στο κλειστό τετραγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες $x = 0$, $x = 5$, $y = -3$, $y = 0$.

Άσκηση 11. Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$ στον κλειστό δίσκο με κέντρο $(0, 0)$ και ακτίνα 1.

Σημείωση: Οι ασκήσεις 8-11 αφορούν την ύλη που θα διδαχθεί στο μάθημα της Τρίτης 20 Απριλίου.