

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 11

Άσκηση 1. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 &= 0, \\2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 &= 0.\end{aligned}$$

Δείξτε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τα u, v ως συναρτήσεις των x, y σε περιοχή του σημείου $(u, v, x, y) = (2, 1, 2, -1)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ στο παραπάνω σημείο.

Άσκηση 2. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} - \cos z = 0.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση των x, z σε περιοχή του σημείου $(x, y, z) = (0, 1, 0)$; Μπορούμε να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση των x, y σε περιοχή του σημείου $(x, y, z) = (0, 1, 0)$;

Άσκηση 3. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$\begin{aligned}xy^2 + xzu + yv^2 - 3 &= 0, \\u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 &= 0.\end{aligned}$$

Δείξτε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τα u, v ως συναρτήσεις των x, y, z σε περιοχή του σημείου $(u, v, x, y, z) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial z}$ στο παραπάνω σημείο.

Άσκηση 4. Θεωρούμε το υποσύνολο του \mathbb{R}^3 που ορίζεται από το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned}z^2 + xy &= 3, \\z^2 + x^2 - y^2 &= 10.\end{aligned}$$

Γύρω από ποιά σημεία (x_0, y_0, z_0) το παραπάνω σύνολο μπορεί να παρασταθεί στην μορφή $x = f(z), y = g(z)$; Υπολογίστε τότε τις $f'(z), g'(z)$.

Άσκηση 5. Θεωρούμε την απεικόνιση $F(x, y) = (x^2 - xy, x - y)$. Γύρω από ποιά (x, y) υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση;

Άσκηση 6. Θεωρούμε την απεικόνιση $F(r, \theta, \phi) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$. Γύρω από ποιά (r, ϕ, θ) υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση;