ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

Ασκηση 1. Εστω (ϵ) η ευθεία που περνάει από το σημείο $(1,1,1)$ και είναι κάθετη στο επίπεδο $3x - y + 2z = 4$. Βρείτε το σημείο στο οποίο η (ϵ) συναντά το επίπεδο $x + 2y + 3z = 20$.

Ασκηση 2. Για ποιές τιμές τού b το διάνυσμα $2\vec{i} + b\vec{j}$ είναι κάθετο στα δύο διανύσματα $-3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ και $\vec{k}$.

Ασκηση 3. Δείξτε ότι η ευθεία (ϵ) που ορίζεται ως η τομή των επιπέδων με εξισώσεις $x + 2y - 2z = 5$ και $5x - 2y - z = 0$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ') που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 5 + 2t,\ y = -2 + 3t,\ z = 1 + 4t$.

Ασκηση 4. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $\vec{v_1}$ και $\vec{v_2}$ έχουν το ίδιο μέτρο (μήκος). Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v_1} + \vec{v_2}$ και $\vec{v_1} - \vec{v_2}$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Ασκηση 5. Εστω (ϵ) η ευθεία που δίδεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 2t,\ y = 1 + 3t,\ z = -2 - t$ και έστω (σ) η ευθεία που δίδεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 2 + 2s,\ y = -3 + 3s,\ z = -s$.
(α) Δείξτε ότι οι ευθείες (ϵ) και (σ) είναι παράλληλες.
(β) Βρείτε την εξίσωση τού επιπέδου που ορίζουν οι παραπάνω ευθείες.

Ασκηση 6. Θεωρούμε τα σημεία P, Q, R τού χώρου με συντεταγμένες $P = (-1,1,0),\ \ Q = (1,0,1),\ \ R = (0,1,0)$.
α) Γράψτε την εξίσωση τού επιπέδου (Π) που διέρχεται από τα σημεία P, Q, R.
β) Γράψτε την εξίσωση τού επιπέδου (Σ) που διέρχεται από το σημείο $(0,0,0)$ και είναι παράλληλο προς το επίπεδο (Π).

Ασκηση 7. α) Βρείτε στο επίπεδο την απόσταση τού σημείου $P = (2,8)$ από την ευθεία $x + 3y = 6$.
β) Δείξτε οτι η απόσταση d ενός σημείου $P = (x_1, y_1)$ τού επιπέδου από την ευθεία $ax + by = c$ δίδεται από τον τύπο

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Υπόδειξη: πάρτε ένα σημείο $Q = (x_0, y_0)$ στην ευθεία και προβάλετε στο κάθετο διάνυσμα τής ευθείας).

Ασκηση 8. Βρείτε στο επίπεδο την απόσταση των παράλληλων ευθειών που δίνονται από τις εξισώσεις $2x + y = 3$ και $2x + y = 8$.

Ασκηση 9. Δείξτε ότι τα επίπεδα που ορίζονται από τις εξισώσεις $Ax+By+Cz = D_1$ και $Ax + By + Cz = D_2$ είναι παράλληλα και ότι η απόστασή τους d δίδεται από τον τύπο

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(Υπόδειξη: πάρτε ένα σημείο $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ στο πρώτο επίπεδο και ένα σημείο $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ στο δεύτερο επίπεδο και προβάλετε στο κοινό κάθετο διάνυσμα των δύο επιπέδων).