

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3

Άσκηση 1. Εστω S η επιφάνεια του χώρου που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + 4x - y^2 + 2y = z$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $c_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε η τομή του επιπέδου $z = c_0$ με την επιφάνεια S είναι, ως σύνολο, η ένωση δύο ευθειών $(\epsilon_1) \cup (\epsilon_2)$.

β) Δείξτε ότι οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) τέμνονται σε ένα σημείο P .

γ) Εστω (Π) το επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες (ϵ_1) , (ϵ_2) . Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο (Π) στο σημείο P .

Άσκηση 2. Για τις παρακάτω επιφάνειες τού χώρου \mathbb{R}^3 βρείτε τις ισοσταθμικές καμπύλες, βρείτε την τομή τους με τα τρία επίπεδα συντεταγμένων και σχεδιάστε τις.

α) $z = (x - 4)^2 + y^2$.

β) $(x - 1)^2 + y^2 - z^2 = 1$.

γ) $z + y^2 - 4y = 0$.

δ) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 8$.

ε) $x + 2y = 1$.

στ) $z = 4x^2 + y^2 + 1$.

Άσκηση 3. Βρείτε τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι πολικές συντεταγμένες (r, θ) δίδονται από:

α) $(3, \pi)$.

β) $(2, \pi/3)$.

γ) $(3, \pi/4)$.

δ) $(\sqrt{2}, \pi/4)$.

ε) $(2\sqrt{3}, 2\pi/3)$.

Άσκηση 4. Βρείτε τις κυλινδρικές και τις σφαιρικές συντεταγμένες των σημείων των οποίων οι καρτεσιανές συντεταγμένες δίδονται από:

α) $(1, 1, 1)$.

β) $(1, -1, 1)$.

γ) $(1, 1, -1)$.

δ) $(0, 1, 1)$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι η εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες $r = \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$, ορίζει τμήμα κύκλου.

Άσκηση 6. Σχεδιάστε την καμπύλες που δίδονται σε πολικές συντεταγμένες από τις εξισώσεις

α) $r = 1 - \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

β) $r = 2 + \cos \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

γ) $r \sin \theta = 2$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

δ) $r \sin \theta = 2$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$.

Άσκηση 7. Σχεδιάστε την επιφάνεια που σε κυλινδρικές συντεταγμένες (r, θ, z) δίδεται από την εξίσωση $r = z, r, z \geq 0$.

Άσκηση 8. Σχεδιάστε την επιφάνεια που σε σφαιρικές συντεταγμένες (ρ, θ, ϕ) δίδεται από την εξίσωση $\theta = \phi, 0 \leq \theta, \phi \leq \pi/2$.

Άσκηση 9. Βρείτε το διάνυσμα τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στον χρόνο $t = 1$ τής κίνησης που δίδεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{\sigma}(t) = (1+t) \vec{i} + \frac{t^2}{\sqrt{2}} \vec{j} + \frac{t^3}{3} \vec{k}$$

Άσκηση 10. Θεωρούμε την κίνηση που δίδεται από το διάνυσμα θέσης

$$\vec{\sigma}(t) = \vec{i} + 5 \cos t \vec{j} + 3 \sin t \vec{k} \quad t \in [0, 2\pi]$$

Βρείτε για ποιές τιμές τού t το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης.