

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Άσκηση 1. Θεωρούμε μια κίνηση που δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\vec{\sigma}(t)$ και της οποίας η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t έχει σταθερή τιμή c (δηλ. το $\|\vec{\sigma}'(t)\| = c$, για κάθε t). Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης σε κάθε χρονική στιγμή t .

Άσκηση 2. Θεωρούμε δύο σωματίδια P_1 και P_2 των οποίων η κίνηση δίδεται από τα διανύσματα θέσης (τα s, t δηλώνουν χρόνο)

$$\vec{\sigma}_1(s) = 2s \vec{i} + (s - 5) \vec{j} + s \vec{k}, \quad \vec{\sigma}_2(t) = (3 + t) \vec{i} - (2 + t) \vec{j} + (1 + t) \vec{k}$$

α) Δείξτε ότι οι τροχιές των παραπάνω κινήσεων διασταυρώνονται, όμως ότι τα κινητά δεν συναντούνται.

β) Βρείτε ποιά είναι η κοντινότερη απόσταση που έρχονται τα κινητά στην διάρκεια των παραπάνω κινήσεων.

Άσκηση 3. θεωρούμε τις εξής δύο καμπύλες στον χώρο: $\sigma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ και $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ με $\tau(s) = (s, s, \frac{\pi}{2\sqrt{2}} s)$.

α) Δείξτε ότι οι παραπάνω καμπύλες τέμνονται σε ένα σημείο P .

β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα ταχύτητας των σ και τ στο σημείο τομής P (η θ λέγεται η γωνία των δύο καμπύλων στο σημείο τομής τους). Βρείτε το $\cos \theta$.

Άσκηση 4. Για τις παρακάτω συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ βρείτε τις καμπύλες στάθμης, βρείτε την τομή του γραφήματός τους με τους τρεις άξονες συντεταγμένων και με τα τρία επίπεδα συντεταγμένων και, τέλος, σχεδιάστε το γράφημά τους.

α) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 2$.

β) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 1$.

γ) $f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$.

δ) $f(x, y) = x^2 + y + 1$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι τα παρακάτω υποσύνολα του επιπέδου είναι ανοικτά:

α) $A = \{(x, y), x > 0\}$.

β) $B = \{(x, y), 0 < y < 2\}$.

γ) $C = \{(x, y), x + y > 1\}$.

δ) $D = \{(x, y), x^2 + y^2 < 1\}$.

ε) $E = \{(x, y), 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

Άσκηση 6. Για τα παρακάτω υποσύνολα του επιπέδου βρείτε το εσωτερικό τους και το σύνορό τους:

α) $A = \{(x, y), x \geq 0\}$.

β) $B = \{(x, y), 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

γ) $C = \{(x, y), x + y \neq 2\}$.

Άσκηση 7. Βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν :

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^3(y+1)$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} x^2/y$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \sin x}{x}$.

δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x \sin y}{x^2+1}$.

ε) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} x^3(y+1)$.

στ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2-y^2}{x-y}$.

Άσκηση 8. Βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^x y}{x+1}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4+y^4}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5}{x^4+y^4}$.

Άσκηση 9. Δείξτε ότι τα παρακάτω όρια δεν υπάρχουν:

α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x-y}{x+y}$.

β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-y)^2}{(x-1)^2+(y-1)^2}$.

γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{(x-1)^2}{(x-y)^2} - \frac{y-1}{x-y}$.