

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Άσκηση 1. α) Έστω ότι $f(x, y) = e^{xy}$. Δείξτε ότι $x f_x - y f_y = 0$.

β) Έστω ότι $f(x, y) = e^x \sin y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$.

Άσκηση 2. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x, y, z) = (xz + 1)(2y - 3)$.

β) $f(x, y) = \frac{z}{x+y}$.

Άσκηση 3. Βρείτε τις τιμές των μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ της συνάρτησης $f(x, y) = (x + y)e^{2x}$ στο σημείο $(1, 2)$.

Άσκηση 4. Βρείτε την εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου τού γραφήματος των παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίδονται:

α) $f(x, y) = (x + 1)(2y - 3)$ στο σημείο $(1, 1, -2)$.

β) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$ στο σημείο $(3, 2, 5)$.

γ) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$ στο σημείο $P = (3, 4, \ln 5)$.

Άσκηση 5. Δείξτε ότι τα γραφήματα των συναρτήσεων $f(x, y) = x^2 + y^2$ και $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ έχουν το ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0, 0, 0)$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι το διάνυσμα $\langle 6, 3, -1 \rangle$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x, y) = x^2 + y^3$ στο σημείο $(3, 1, 10)$.

Άσκηση 7. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$f(x, y) = x^2 + y^2.$$

α) Βρείτε το εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης f στο σημείο $(a, b, a^2 + b^2)$.

β) Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τα a, b ώστε το παραπάνω εφαπτόμενο επίπεδο να διέρχεται από το σημείο $(0, 0, -4)$;

γ) Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο των σημείων τού γραφήματος τής συνάρτησης f που έχουν την ιδιότητα ότι το εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος σε αυτά τα σημεία διέρχεται από το σημείο $(0, 0, -4)$.

Άσκηση 8. Βρείτε το $\nabla f(P)$ για f και P που δίδονται από:

α) $f(x, y, z) = e^{x+y} \cos z$, $P = (0, 0, \pi/6)$.

β) $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$, $P = (3, 4)$.

γ) $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$, $P = (1, 2, -2)$.