ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #7

***Ασκηση* 1.** Έστω $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$.
α) Βρείτε το πεδίο ορισμού τής παραπάνω συνάρτησης.
β) Δείξτε, για κάθε (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού, ότι το εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $< x_0, y_0, f(x_0, y_0) >$.
γ) Μπορείτε να βρείτε γεωμετρική ερμηνεία τού β);

***Ασκηση* 2.** Βρείτε τον πίνακα μερικών παραγώγων εκτιμημένο στα δοσμένα σημεία για τις παρακάτω απεικονίσεις :
α) $f(x,y,z) = (e^{x+y}, x\cos z)$, $P = (0,0,\pi/6)$.
β) $f(x,y) = (x+y, x-y, xy)$, $P = (1,2)$.
γ) $f(x,y,z) = (x+y, x^2z, xyz)$, $P = (-1,1,0)$.
δ) f$(x,y,z) = (xe^{x+y}, x^2+y^2+z^2)$, $P = (1,2,-1)$.

***Ασκηση* 3.** Έστω $z(x,y) = x^2 + e^{y^2}$ και $x = \sin 2t$, $y = \cos(t^2)$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}$ ως εξής: α) εφαρμόζοντας τον κανόνα τής αλυσίδας, β) αντικαθιστώντας τα x, y στον τύπο τής $z(x,y)$ και παραγωγίζοντας.

***Ασκηση* 4.** Έστω συνάρτηση $z = z(x,y)$ με $\frac{\partial z}{\partial x}|_{(2,0)} = 1$ και $\frac{\partial z}{\partial y}|_{(2,0)} = 3$. Έστω ότι $x = e^t + e^{-t}$ και $y = e^t - e^{-t}$. Βρείτε το $\frac{dz}{dt}|_{t=0}$.

***Ασκηση* 5.** Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ όπου $w = (x^2+y+2)^4 + (x+y-2)^3$ και $x = u+2v-1$, $y = 2u-v+2$.

***Ασκηση* 6.** Βρείτε τις $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ όπου $w = uv + \ln v$ και $u = x+y^2$, $v = e^x \cos y$.

***Ασκηση* 7.** Βρείτε την $\frac{\partial z}{\partial u}|_{(0,1)}$ όπου $z = \sin(xy) + x\sin y$ και $x = u^2+v^2$, $y = uv$.

***Ασκηση* 8.** Έστω $z = f(t)$ και $t = \frac{x+y}{xy}$. Δείξτε ότι $x^2\frac{\partial z}{\partial x} = y^2\frac{\partial z}{\partial y}$.

***Ασκηση* 9.** Έστω $z = f(u,v)$ και $u = x+y$, $v = x-y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 - (\frac{\partial z}{\partial v})^2$.