ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Ασκηση 1. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x,y) = e^{-2y}\cos 2x$ ικανοποιεί την σχέση $f_{xx} + f_{yy} = 0$.

Ασκηση 2. Γνωρίζουμε ότι για καλές συναρτήσεις έχουμε $f_{xy} = f_{yx}$ (δηλ. $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$). Βρείτε ποιό από τα δύο είναι ευκολότερο να υπολογίσουμε για τίς παρακάτω συναρτήσεις:
α) $f(x,y) = x\sin y + e^y$
β) $f(x,y) = 1/x$
γ) $f(x,y) = y + \frac{x}{y}$
δ) $f(x,y) = x\ln(xy)$

Ασκηση 3. Βρείτε την $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ όπου $z = z(u,v)$ και $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Η απάντηση πρέπει να είναι έκφραση των u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Ασκηση 4. Έστω ότι $w = f(u)$, όπου $u = xg(y)$. Δείξτε ότι $w_{xx} = f''(xg(y))\,(g(y))^2$.

Ασκηση 5. Για ποιές τιμές τού n η συνάρτηση $f(x,y,z) = (x^1 + y^2 + z^2)^n$ ικανοποιεί την σχέση $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$;

Ασκηση 6. Εστω $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$ η απεικόνιση που είναι η σύνθεση $h = f \circ g$ των απεικονίσεων $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ οι οποίες ορίζονται ως εξής: $g(s,t) = (t + \cos(\pi s),\ te^s,\ t^2 + s^2)$ και $f(x,y,z) = (x+y+z,\ xyz)$. Υπολογίστε με τον κανόνα τής αλυσίδας τα
α) $\frac{\partial h_2}{\partial t}$.
β) $\frac{\partial h_1}{\partial s}(1,0)$.
Επιβεβαιώστε τα αποτελέσματά σας, υπολογίζοντας πρώτα τον τύπο τής απεικόνισης $h(s,t)$.

Ασκηση 7. Βρείτε τα εφαπτόμενα επίπεδα των επιφανειών που ορίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις στα δοσμένα σημεία:
α) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ το σημείο $P = (2, -1, -\sqrt{5})$.
β) $\frac{x+y}{xy-1} - z = 0$ το σημείο $P = (1,2,3)$.

Ασκηση 8. Βρείτε τα σημεία τής επιφάνειας $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ όπου το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς το $xy-$επίπεδο.

Ασκηση 9. Υπολογίστε τις κατά κατεύθυνση παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία και ως προς τις δοσμένες κατευθύνσεις:
α) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2$, $\quad P = (1,2)$, $\vec{v} = <3/5,\ 4/5>$.
β) $f(x,y) = e^x\cos(\pi y)$, $\quad P = (0,-1)$, $\vec{v} = < -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} >$.

γ) $f(x,y) = x^y$, $P = (e,e)$, $\vec{v} =< 5/13,\ 12/13 >$.

Ασκηση 10. Βρείτε ως προς ποιά κατεύθυνση η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \cos(\pi x)$ έχει μέγιστη αύξηση στο σημείο $P = (0,-1)$.

Ασκηση 11. Βρείτε την κατά κατεύθυνση παράγωγο τής συνάρτησης $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x$ στο σημείο $P = (4,-2,-1)$ ως πρός την κατεύθυνση τού διανύσματος $\frac{1}{\sqrt{14}} < 1,3,2 >$.

Ασκηση 12. Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα στον χώρο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
α) Έστω $P = (x_0, y_0, z_0)$ σημείο τής παραπάνω σφαίρας. Γράψτε την εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου Π_P στην σφαίρα στο σημείο P.
β) Έστω (ϵ) η ευθεία τού χώρου που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 2 - 2t$, $y = 3t$, $z = 0$. Βρείτε όλα τα σημεία $P = (x_0, y_0, z_0)$ τής παραπάνω σφαίρας με την ιδιότητα ότι το αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο Π_P περιέχει την ευθεία (ϵ) (*Υπόδειξη:* για να περιέχει το επίπεδο Π_P την ευθεία (ϵ) αρκεί να περιέχει δύο διαφορετικά σημεία της).