

**ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2014-15**  
**ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 9**

**Άσκηση 1.** Βρείτε τα κρίσιμα σημεία για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α)  $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$ .

β)  $f(x, y) = xy + yx^5 + xy^5$ .

γ)  $f(x, y) = \cos(x + y)$ .

δ)  $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ .

ε)  $f(x, y) = e^{1-x^2+y^2}$ .

στ)  $f(x, y) = x^2 + 2xy$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $f(x, y) = ax^2 + by^2$ , όπου  $a, b$  σταθερές. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f$  και εξετάστε πότε είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

**Άσκηση 3.** Για κάθε μια από τις περιπτώσεις της άσκησης 1, εφαρμόστε το κριτήριο της δεύτερης παραγώγου και βρείτε σε ποιά από τα κρίσιμα σημεία η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο.

**Άσκηση 4.** Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης  $f(x, y) = 2x^2 - 4x + y^2 - 4y + 1$  στο κλειστό τριγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες  $x = 0$ ,  $y = 2$ ,  $y = 2x$ .

**Άσκηση 5.** Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης  $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 6x + 2$  στο κλειστό τετραγωνικό χωρίο που έχει ως σύνορο τις ευθείες  $x = 0$ ,  $x = 5$ ,  $y = -3$ ,  $y = 0$ .

**Άσκηση 6.** Βρείτε τα απόλυτα (ολικά) μέγιστα και ελάχιστα της συνάρτησης  $f(x, y) = (x^2 + y^2)^4$  στον κλειστό δίσκο με κέντρο  $(0, 0)$  και ακτίνα 1.

**Άσκηση 7.** Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σε ποιά από αυτά η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$  έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο

**Άσκηση 8.** Έστω  $D$  το κλειστό φραγμένο χωρίο τού επιπέδου που έχει ως κάτω σύνορο τον  $x$ -άξονα και ως επάνω σύνορο το πάνω ημικύκλιο τού μοναδιαίου κύκλου  $x^2 + y^2 = 1$ . Βρείτε τα σημεία τού  $D$  όπου η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 + y^2 - y + 5$  έχει απόλυτο (ολικό) μέγιστο ή ελάχιστο.

**Άσκηση 9.** Έστω  $D$  το κλειστό φραγμένο χωρίο τού επιπέδου που περικλείεται από το τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0)$ ,  $(2, 4)$  και  $(4, 0)$ . Βρείτε τα σημεία τού χωρίου  $D$  όπου η συνάρτηση  $f(x, y) = x^2 + y^2 - y$  έχει απόλυτο (ολικό) μέγιστο ή ελάχιστο.

**Άσκηση 10.** Θεωρούμε την συνάρτηση  $f(x, y) = \sin(xy)$ .

α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της  $f(x, y)$ .

β) Εξετάσατε την φύση τους (τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα, σαγματικά σημεία). (Υπόδειξη: Στα σημεία στα οποία το κριτήριο της 2ης παραγώγου αποτυγχάνει,

προσπαθείστε να βρείτε έναν πιο εύκολο τρόπο για να συμπεράνετε ότι είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).