

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 1

Άσκηση 1. α) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας στον χώρο που διέρχεται από το σημείο $(2, 1, 1)$ και είναι παράλληλο προς το διάνυσμα $\vec{w} = \langle -1, 2, 2 \rangle$.

β) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας στον χώρο που διέρχεται από τα σημεία $P = (1, 1, 1)$ και $Q = (2, 3, -1)$.

γ) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου στον χώρο που διέρχεται από το σημείο $(2, 1, 1)$ και εκτείνεται από τα διανύσματα $\vec{v} = \langle 2, 0, 1 \rangle$ και $\vec{w} = \langle 5, 1, 3 \rangle$

Άσκηση 2. Για ποιές τιμές του b το διάνυσμα $\vec{v} = \langle 2, b, 0 \rangle$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{w} = \langle -3, 2, 1 \rangle$;

Άσκηση 3. Εστω (ϵ) η ευθεία που δίδεται από παραμετρικές εξισώσεις $x = 1 + t, y = 1 + t, z = 1 + 2t$ και έστω (σ) η ευθεία που δίδεται από παραμετρικές εξισώσεις $x = s, y = s, z = 2 - s$.

α) Δείξτε ότι οι ευθείες (ϵ) και (σ) τέμνονται σε κάποιο σημείο P τού οποίου βρείτε τις συντεταγμένες.

β) Δείξτε ότι οι παραπάνω ευθείες τέμνονται καθέτως.

Άσκηση 4. Εστω (ϵ) η ευθεία στον χώρο που δίδεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$ και έστω $P_0 = (3, 1, -2)$.

α) Βρείτε δύο διαφορετικά σημεία Q_1, Q_2 στην ευθεία (ϵ) .

β) Εστω $Q_t = (-1 + t, -2 + t, -1 + t)$ τού 'τυχαίο' σημείο της ευθείας (ϵ) . Βρείτε για ποιά τιμή της παραμέτρου t τού διάνυσμα $\vec{Q_t P_0}$ είναι κάθετο στην ευθεία (ϵ) . (Υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τού διάνυσμα $\vec{Q_1 Q_2}$ που ορίζεται από τα σημεία τού ερωτήματος α).

γ) Βρείτε τις παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που περνάει από τού σημείο P_0 και είναι κάθετη στην ευθεία (ϵ) .

Άσκηση 5. Έστω \vec{v} και \vec{w} διανύσματα τού \mathbb{R}^3 . Δείξτε ότι

α) $2\|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{w}\|^2 = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$.

β) $\|\vec{v} - \vec{w}\| \cdot \|\vec{v} + \vec{w}\| \leq \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2$.

γ) $4\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v} + \vec{w}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{w}\|^2$.

Άσκηση 6. Θεωρούμε τα σημεία P, Q, R τού χώρου με συντεταγμένες $P = (-1, 1, 0), Q = (1, 0, 1), R = (0, 1, 0)$.

α) Βρείτε τις συντεταγμένες τών διανυσμάτων \vec{PR} και \vec{QR} .

β) Βρείτε ένα (μή μηδενικό) διάνυσμα $\vec{v} = \langle a, b, c \rangle$ τού οποίου να είναι κάθετο στα διανύσματα \vec{PR} και \vec{QR} .

Άσκηση 7. Για ποιές τιμές τού b τού διάνυσμα $2\vec{i} + b\vec{j}$ είναι κάθετο στα δύο διανύσματα $-3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ και \vec{k} .

Άσκηση 8. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα \vec{v}_1 και \vec{v}_2 έχουν τού ίδιο μέτρο (μήκος). Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ και $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ είναι κάθετα μεταξύ τους.

Άσκηση 9. Βρείτε την προβολή του διανύσματος $\vec{v} = \langle 2, 1 - 3 \rangle$ στο διάνυσμα $\vec{u} = \langle -1, 1, 1 \rangle$.

Άσκηση 10. Θεωρούμε τὰ σημεία P, Q, R τού χώρου με συντεταγμένες $P = (-1, 1, 0)$, $Q = (1, 0, 1)$, $R = (0, 1, 0)$.

α) Γράψτε τήν εξίσωση τού επιπέδου (Π) που διέρχεται από τὰ σημεία P, Q, R .

β) Γράψτε τήν εξίσωση τού επιπέδου (Σ) που διέρχεται από τὸ σημείο $(0, 0, 0)$ και είναι παράλληλο προς τὸ επίπεδο (Π) .

Άσκηση 11. Βρείτε τὸ εμβαδὸν τού τριγώνου με κορυφές τὰ σημεία $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 0, 1)$.

Άσκηση 12. Ἐστω (ϵ) ἡ ευθεΐα που περνάει ἀπὸ τὸ σημείο $(1, 1, 1)$ και είναι κάθετη στοῦ ἐπίπεδο $3x - y + 2z = 4$. Βρείτε τὸ σημείο στοῦ οποίου ἡ (ϵ) συναντᾷ τὸ ἐπίπεδο $x + 2y + 3z = 20$.