ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #12

Ασκηση 1. Βρείτε αν οι παρακάτω καμπύλες τού επιπέδουν παριστούν γράφημα συνάρτησης $y = y(x)$ (δηλ. επιλύονται μοναδικά ως προς y) γύρω από τα δοσμένα σημεία (x_0, y_0). Στην περίπτωση αυτή βρείτε τό $y'(x_0)$:
α) $x^2 + y^2 - 2y = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$.
β) $xy + ln(xy) = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 1)$.
γ) $x^4 + y^4 + xy = 1$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$

Ασκηση 2. Βρείτε αν οι παρακάτω επιφάνειες τού χώρου παριστούν γράφημα συνάρτησης $z = z(x, y)$ (δηλ. επιλύονται μοναδικά ως προς z) γύρω από τα δοσμένα σημεία (x_0, y_0, z_0). Στην περίπτωση αυτή βρείτε τίς μερικές παραγώγους $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ και $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$:
α) $x^2 + y^2 + z^2 - 2y = 1$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.
β) $xyz = z^3$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1)$.
γ) $x + y + z = \cos(xyz)$, $(x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$.

Ασκηση 3. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0\,,$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0\,.$$

Δείξτε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τα u, v ως συναρτήσεις των x, y (δηλ. να επιλύσουμε μοναδικά ως προς u, v) σε περιοχή τού σημείου $(u, v, x, y) = (2, 1, 2, -1)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ στο σημείο $(x, y) = (2, -1)$.

Ασκηση 4. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} - \cos z = 0\,.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το y ως συνάρτηση των x, z σε περιοχή τού σημείου $(x, y, z) = (0, 1, 0)$; Μπορούμε να εκφράσουμε το z ως συνάρτηση των x, y σε περιοχή τού σημείου $(x, y, z) = (0, 1, 0)$;

Ασκηση 5. Θεωρούμε το παρακάτω σύστημα

$$xy^2 + xzu + yv^2 - 3 = 0\,,$$
$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 - 2 = 0\,.$$

Δείξτε ότι μπορούμε να εκφράσουμε τα u, v ως συναρτήσεις των x, y, z σε περιοχή τού σημείου $(u, v, x, y, z) = (1, 1, 1, 1, 1)$. Υπολογίστε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial z}$ στο σημείο $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

Ασκηση 6. Θεωρούμε το υποσύνολο τού $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από το σύστημα των εξισώσεων

$$z^2 + xy = 3\,,$$
$$z^2 + x^2 - y^2 = 10\,.$$

Γύρω από ποιά σημεία (x_0, y_0, z_0) το παραπάνω σύνολο μπορεί να παρασταθεί στην μορφή $x = f(z),\ y = g(z)$ (δηλ. να επιλύθεί μοναδικά ως προς x, y); Υπολογίστε τότε τις $f'(z),\ g'(z)$.

Ασκηση 7. Θεωρούμε την απεικόνιση $F(x, y) = (x^2 - xy, x - y)$. Γύρω από ποιά (x, y) υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση;

Ασκηση 8. Θεωρούμε την απεικόνιση $F(x, y, z) = (x + xyz, y + xy, 2x + z + 3z^2)$. Δείξτε ότι η παραπάνω απεικόνιση έχει αντίστροφη απεικόνιση γύρω από τό σημείο $(x, y, z) = (0, 0, 0)$.

Ασκηση 9. Θεωρούμε την απεικόνιση $F(r, \theta, \phi) = (r \sin\phi \cos\theta, r \sin\phi \sin\theta, r \cos\phi)$. Γύρω από ποιά (r, ϕ, θ) υπάρχει η αντίστροφη απεικόνιση;