ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2

***Ασκηση* 1.** α) Έστω $\vec{v}$, $\vec{w}$ διανύσματα τού $\mathbb{R}^n$. Αν $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{w} \cdot \vec{u}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ τού $\mathbb{R}^n$, δείξτε ότι $\vec{v}=\vec{w}$.
β) Έστω $\vec{v}$, $\vec{w}$ διανύσματα τού $\mathbb{R}^3$. Αν $\vec{v} \times \vec{u} = \vec{w} \times \vec{u}$, για κάθε διάνυσμα $\vec{u}$ τού $\mathbb{R}^3$, δείξτε ότι $\vec{v}=\vec{w}$.

***Ασκηση* 2.** α) Έστω $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i^2)(\sum_{i=1}^{n} b_i^2) \geq ((\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2.$$

β) Έστω $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ με $a_1 + \cdots + a_n = 1$. Δείξτε ότι $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}$. (Υπόδειξη: γράψτε $n = 1 + \cdots + 1$).

***Ασκηση* 3.** Δείξτε ότι η ευθεία (ϵ) που ορίζεται ως η τομή τών επιπέδων με εξισώσεις $x + 2y - 2z = 5$ και $5x - 2y - z = 0$ είναι παράλληλη στην ευθεία (ϵ') που ορίζεται από τίς παραμετρικές εξισώσεις $x = 5 + 2t,\ y = -2 + 3t,\ z = 1 + 4t$.

***Ασκηση* 4.** Έστω (ϵ) η ευθεία που δίδεται από τίς παραμετρικές εξισώσεις $x = 2t$, $y = 1 + 3t$, $z = -2 - t$ και έστω (σ) η ευθεία που δίδεται από τίς παραμετρικές εξισώσεις $x = 2 - 2s$, $y = -3 - 3s$, $z = s$.
(α) Δείξτε ότι οι ευθείες (ϵ) και (σ) είναι παράλληλες.
(β) Βρείτε τήν εξίσωση τού επιπέδου που ορίζουν οι παραπάνω ευθείες.

***Ασκηση* 5.** α) Βρείτε στο επίπεδο τήν απόσταση τού σημείου $P = (2, 8)$ από τήν ευθεία $x + 3y = 6$.
β) Δείξτε οτι η απόσταση d ενός σημείου $P = (x_1, y_1)$ τού επιπέδου από τήν ευθεία $ax + by = c$ δίδεται από τόν τύπο

$$d = \frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(Υπόδειξη: πάρτε ένα σημείο $Q = (x_0, y_0)$ στην ευθεία και προβάλετε στο κάθετο διάνυσμα τής ευθείας).

***Ασκηση* 6.** Βρείτε στο επίπεδο τήν απόσταση των παράλληλων ευθειών που δίνονται από τίς εξισώσεις $2x + y = 3$ και $2x + y = 8$.

***Ασκηση* 7.** Δείξτε ότι τά επίπεδα που ορίζονται από τίς εξισώσεις $Ax+By+Cz = D_1$ και $Ax + By + Cz = D_2$ είναι παράλληλα και ότι η απόστασή τους d δίδεται από τόν τύπο

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

(Υπόδειξη: πάρτε ένα σημείο $Q_1 = (x_1, y_1, z_1)$ στο πρώτο επίπεδο και ένα σημείο $Q_2 = (x_2, y_2, z_2)$ στο δεύτερο επίπεδο και προβάλετε στο κοινό κάθετο διάνυσμα τών δύο επιπέδων).

Ασκηση 8. Εστω S η επιφάνεια τού χώρου που ορίζεται από τήν εξίσωση $x^2 + 4x - y^2 + 2y = z$.
α) Δείξτε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός $c_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε η τομή τού επιπέδου $z = c_0$ με τήν επιφάνεια S είναι, ως σύνολο, η ένωση δύο ευθειών $(\epsilon_1) \cup (\epsilon_2)$.
β) Δείξτε ότι οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2) τέμνονται σε ένα σημείο P.
γ) Εστω (Π) τό επίπεδο που ορίζουν οι ευθείες (ϵ_1), (ϵ_2). Βρείτε τίς παραμετρικές εξισώσεις τής ευθείας που είναι κάθετη στο επίπεδο (Π) στο σημείο P.

Ασκηση 9. Για τις παρακάτω επιφάνειες τού χώρου $\mathbb{R}^3$ βρείτε τίς ισοσταθμικές καμπύλες, βρείτε τήν τομή τους με τά τρία επίπεδα συντεταγμένων και σχεδιάστε τις.
α) $z = (x-4)^2 + y^2$.
β) $(x-1)^2 + y^2 - z^2 = 1$.
γ) $z + y^2 - 4y = 0$.
δ) $x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 8$.
ε) $x + 2y = 1$.
στ) $z = 4x^2 + y^2 + 1$.