

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Άσκηση 1. Βρείτε τα παρακάτω όρια, αν υπάρχουν. Αν δεν υπάρχουν, αποδείξτε το.

- α) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x-y+1)^2}{(x-1)^2+(y-2)^2}$.
β) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{(x-1)^2-(y-2)(x-y+1)}{(x-y+1)^2}$.
γ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(xy)}{x}$.
δ) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^4}{x^2+y^8}$.
ε) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2-y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(x, y) = ye^x + \sin x + (xy)^4$ είναι συνεχής.

Άσκηση 3. Εστω $f(x, y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, όπου $(x, y) \neq (0, 0)$. Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $(0, 0)$;

Άσκηση 4. Εστω $f(x, y) = \frac{\sin(x+y)}{x+y}$, όπου $(x, y) \neq (0, 0)$. Μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση $f(x, y)$ στο σημείο $(0, 0)$ ώστε να γίνει συνεχής συνάρτηση στο $(0, 0)$;

Άσκηση 5. Για κάθε μια από τις συναρτήσεις f , όπου

- α) $f(x, y) = \cos(xy^2)$,
β) $f(x, y) = \frac{2y}{y+\cos x}$,

βρείτε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ και, επίσης, υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial y}$ στο σημείο $(0, 3)$.

Άσκηση 6. Για τις παρακάτω συναρτήσεις βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Υπολογίστε την μερική παράγωγο $\frac{\partial f}{\partial x}$ στο σημείο $(1, 2)$.

- α) $f(x, y) = xe^{1+x^2y}$.
β) $f(x, y) = \sin(xy)$.
γ) $f(x, y) = \frac{1}{\cos^2 x + e^{-y}}$.
δ) $f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + 2y^4}$.
ε) $f(x, y) = \log \sqrt{1 + xy}$.
στ) $f(x, y) = x/y$.
ζ) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.
η) $f(x, y) = \tan(\pi x + 2\pi y)$.
θ) $f(x, y) = \frac{x+y}{xy+1}$.

Άσκηση 7. Βρείτε τις μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial xy}$ των παρακάτω συναρτήσεων:

- α) $f(x, y) = (x+1)(2y-3)$.
β) $f(x, y) = \frac{1}{x-y}$.

γ) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^4}$.

δ) $f(x, y) = \frac{xy}{xy+1}$.

ε) $f(x, y) = e^x \cos y$.

Άσκηση 8. Έστω $f(x, y)$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{για } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{για } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι η $f(x, y)$ δεν είναι συνεχής στο σημείο $(0, 0)$.

β) Δείξτε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν στο σημείο $(0, 0)$.