ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6

Ασκηση 1. α) Έστω ότι $f(x,y)=e^{xy}$. Δείξτε ότι $x\,f_x - y\,f_y = 0$.
β) Έστω ότι $f(x,y)=e^x \sin y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$.

Ασκηση 2. Βρείτε τίς μερικές παραγώγους $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ τών παρακάτω συναρτήσεων:
α) $f(x,y,z)=(xz+1)(2y-3)$.
β) $f(x,y)=\frac{z}{x+y}$.

Ασκηση 3. Βρείτε τίς τιμές τών μερικών παραγώγων $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ τής συνάρτησης $f(x,y)=(x+y)e^{2x}$ στο σημείο $(1,2)$.

Ασκηση 4. Βρείτε τήν εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου τού γραφήματος τών παρακάτω συναρτήσεων στα σημεία που δίδονται:
α) $f(x,y)=(x+1)(2y-3)$ στο σημείο $(1,1,-2)$.
β) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ στο σημείο $(3,2,5)$.
γ) $\mathrm{f}(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$ στο σημείο $P=(3,4,\ln 5)$.

Ασκηση 5. Δείξτε ότι τά γραφήματα τών συναρτήσεων $f(x,y)=x^2+y^2$ και $g(x,y)=-x^2-y^2+xy^3$ έχουν τό ίδιο εφαπτόμενο επίπεδο στο σημείο $(0,0,0)$.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι τό διάνυσμα $<6,3,-1>$ είναι κάθετο στο εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x,y)=x^2+y^3$ στο σημείο $(3,1,10)$.

Ασκηση 7. Έστω $\mathrm{f}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται ως

$$\mathrm{f}(x,y)=x^2+y^2\,.$$

α) Βρείτε τό εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος τής συνάρτησης f στο σημείο (a,b,a^2+b^2).
β) Ποιά συνθήκη πρέπει να ικανοποιούν τά a,b ώστε τό παραπάνω εφαπτόμενο επίπεδο να διέρχεται από τό σημείο $(0,0,-4)$;
γ) Περιγράψτε γεωμετρικά τό σύνολο τών σημείων τού γραφήματος τής συνάρτησης f που έχουν τήν ιδιότητα ότι τό εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος σε αυτά τά σημεία διέρχεται από τό σημείο $(0,0,-4)$.

Ασκηση 8. Βρείτε τό $\nabla f(P)$ για f και P που δίδονται από:
α) $f(x,y,z)=e^{x+y}\cos z$, $P=(0,0,\pi/6)$.
β) $f(x,y)=\ln(\sqrt{x^2+y^2})$, $P=(3,4)$.
γ) $f(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$, $P=(1,2,-2)$.

Ασκηση 9. Έστω $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.
α) Βρείτε τό πεδίο ορισμού τής παραπάνω συνάρτησης.

β) Δείξτε, για κάθε (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού, ότι τό εφαπτόμενο επίπεδο τού γραφήματος στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ είναι κάθετο στο διάνυσμα $< x_0, y_0, f(x_0, y_0) >$.
γ) Μπορείτε να βρείτε γεωμετρική ερμηνεία τού β);

Ασκηση 10. Βρείτε τόν πίνακα μερικών παραγώγων εκτιμημένο στα δοσμένα σημεία για τις παρακάτω απεικονίσεις :
α) $f(x, y, z) = (e^{x+y}, x \cos z)$, $P = (0, 0, \pi/6)$.
β) $f(x, y) = (x + y, x - y, xy)$, $P = (1, 2)$.
γ) $f(x, y, z) = (x + y, x^2 z, xyz)$, $P = (-1, 1, 0)$.
δ) $\mathrm{f}(x, y, z) = (xe^{x+y}, x^2 + y^2 + z^2)$, $P = (1, 2, -1)$.

Ασκηση 11. Έστω $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ με $F(x_1, x_2, x_3) = (\cos(x + y), y + \sin x, x - y)$ και $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με $G(t_1, t_2) = (t_1 t_2, t_1 + t_2)$.
α) Βρείτε τήν απεκόνιση $F \circ G$.
β) Γράψτε τον τύπο τού κανόνα τής αλυσίδας γα τίς παραπάνω συναρτήσεις.
γ) Βρείτε τήν μερική παράγωγο $\frac{\partial (F \circ G)_1}{\partial t_2}$ σε σχέση με τίς μερικές παραγώγους τών F και G (Σημ: $(F \circ G)_1$ είναι η πρώτη συνιστώσα συνάρτηση τής απεκόνισης $F \circ G$).