ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Ασκηση 1. Εστω $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ με $h(s,t) = (h_1(s,t), h_2(s,t))$ η απεικόνιση που είναι η σύνθεση $h = f \circ g$ τών απεικονίσεων $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ και $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ οι οποίες ορίζονται ως εξής: $g(s,t) = (t+\cos(\pi s),\, te^s,\, t^2+s^2)$ και $f(x,y,z) = (x+y+z,\, xyz)$. Υπολογίστε με τόν κανόνα τής αλυσίδας τά
α) $\frac{\partial h_2}{\partial t}$.
β) $\frac{\partial h_1}{\partial s}(1,0)$.
Επιβεβαιώστε τά αποτελέσματά σας, υπολογίζοντας πρώτα τόν τύπο τής απεικόνισης $h(s,t)$.

Ασκηση 2. Έστω $z(x,y) = x^2 + e^{y^2}$ και $x = \sin 2t$, $y = \cos(t^2)$. Βρείτε τό $\frac{dz}{dt}$ ως εξής: α) εφαρμόζοντας τόν κανόνα τής αλυσίδας, β) αντικαθιστώντας τά x, y στον τύπο τής $z(x,y)$ και παραγωγίζοντας.

Ασκηση 3. Βρείτε τίς $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$ όπου $w = (x^2 + y + 2)^4 + (x + y - 2)^3$ και $x = u + 2v - 1$, $y = 2u - v + 2$.

Ασκηση 4. Βρείτε τήν $\frac{\partial z}{\partial u}(0,1)$ όπου $z = \sin(xy) + x \sin y$ και $x = u^2 + v^2$, $y = uv$.

Ασκηση 5. Βρείτε τίς $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ όπου $w = uv + \ln v$ και $u = x + y^2$, $v = e^x \cos y$.

Ασκηση 6. Έστω συνάρτηση $z = z(x,y)$ με $\frac{\partial z}{\partial x}(2,0) = 1$ και $\frac{\partial z}{\partial y}(2,0) = 3$. Έστω ότι $x = e^t + e^{-t}$ και $y = e^t - e^{-t}$. Βρείτε τό $\frac{dz}{dt}(0)$.

Ασκηση 7. Έστω $z = f(t)$ και $t = \frac{x+y}{xy}$. Δείξτε ότι $x^2 \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \frac{\partial z}{\partial y}$.

Ασκηση 8. Έστω $z = f(u,v)$ και $u = x + y$, $v = x - y$. Δείξτε ότι $\frac{\partial z}{\partial x}\, \frac{\partial z}{\partial y} = (\frac{\partial z}{\partial u})^2 - (\frac{\partial z}{\partial v})^2$.

Ασκηση 9. Βρείτε τήν $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ όπου $z = z(u,v)$ και $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Η απάντηση πρέπει να είναι έκφραση τών u, v, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Ασκηση 10. Έστω ότι $w = f(u)$, όπου $u = xg(y)$. Δείξτε ότι $w_{xx} = f''(xg(y))\, (g(y))^2$.

Ασκηση 11. Για ποιές τιμές τού n η συνάρτηση $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^n$ ικανοποιεί τήν σχέση $f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = 0$;

Ασκηση 12. Βρείτε τά εφαπτόμενα επίπεδα τών επιφανειών που ορίζονται από τίς παρακάτω εξισώσεις στα δοσμένα σημεία:
α) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ στο σημείο $P = (2, -1, -\sqrt{5})$.
β) $\frac{x+y}{xy-1} - z = 0$ στο σημείο $P = (1, 2, 3)$.

Ασκηση 13. Βρείτε τά σημεία τής επιφάνειας $xy + yz + zx - x - z^2 = 0$ όπου τό εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο προς τό $xy-$επίπεδο.

Ασκηση 14. Υπολογίστε τίς κατά κατεύθυνση παραγώγους τών παρακάτω συναρτήσεων στα δοσμένα σημεία και ως προς τίς δοσμένες κατευθύνσεις:
α) $f(x,y) = x + 2xy - 3y^2, \quad P = (1,2), \ \vec{v} =< 3/5, 4/5 >$.
β) $f(x,y) = e^x \cos(\pi y), \quad P = (0,-1), \ \vec{v} =< -\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} >$.
γ) $f(x,y) = x^y, \quad P = (e,e), \ \vec{v} =< 5/13, 12/13 >$.
δ) $f(x,y,z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x, \quad P = (4,-2,-1), \ \vec{v} =< 1/14, 3/14, 1/7 >$

Ασκηση 15. Βρείτε ως προς ποιά κατεύθυνση η συνάρτηση $f(x,y) = e^x \cos(\pi x)$ έχει μέγιστη αύξηση (αντίστοιχα μέγιστη μείωση) στο σημείο $P = (0,-1)$.