ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #8

Ασκηση 1. Βρείτε το διάνυσμα τής ταχύτητας και τής επιτάχυνσης στον χρόνο $t = 1$ τής κίνησης που δίδεται από τήν παραμετρική καμπύλη $\sigma(t) = (1 + t, \frac{t^2}{\sqrt{2}}, \frac{t^3}{3})$. Βρείτε τήν εξίσωση τής εφαπτόμενης ευθείας τής καμπύλης στό σημείο $\sigma(2)$.

Ασκηση 2. Θεωρούμε την κίνηση πού δίδεται από τήν παραμετρική καμπύλη $\sigma(t) = (1,5\cos t, 3\sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Βρείτε για ποιές τιμές τού t το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης.

Ασκηση 3. Θεωρούμε μια κίνηση πού δίδεται από το διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{\sigma(t)}$ και τής οποίας η ταχύτητα σε κάθε χρονική στιγμή t έχει σταθερή τιμή c (δηλ. το $\|\overrightarrow{\sigma'(t)}\| = c$, για κάθε t). Δείξτε ότι το διάνυσμα ταχύτητας είναι κάθετο στο διάνυσμα επιτάχυνσης σε κάθε χρονική στιγμή t.

Ασκηση 4. Θεωρούμε δύο σωματίδια P_1 και P_2 των οποίων η κίνηση δίδεται από τα διανύσματα θέσης (τα s, t δηλώνουν χρόνο)

$$\overrightarrow{\sigma_1(s)} = 2s\,\vec{i} + (s-5)\,\vec{j} + s\,\vec{k}, \qquad \overrightarrow{\sigma_2(t)} = (3+t)\,\vec{i} - (2+t)\,\vec{j} + (1+t)\,\vec{k}$$

α) Δείξτε ότι οι τροχιές των παραπάνω κινήσεων διασταυρώνονται, όμως ότι τα κινητά δεν συναντούνται.
β) Βρείτε ποιά είναι η κοντινότερη απόσταση που έρχονται τα κινητά στην διάρκεια τών παραπάνω κινήσεων.

Ασκηση 5. θεωρούμε τίς εξής δύο καμπύλες στον χώρο: $\sigma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ και $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\tau(s) = (s, s, \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\, s)$.
α) Δείξτε ότι οι παραπάνω καμπύλες τέμνονται σε ένα σημείο P.
β) Έστω θ η γωνία που σχηματίζουν τά διανύσματα ταχύτητας τώνν σ και τ στο σημείο τομής P (η θ λέγεται η γωνία των δύο καμπύλων στο σημείο τομής τους). Βρείτε το $\cos\theta$.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι η καμπύλη $\sigma(t) = (t^3, 5t - 4, -t^2 + 3)$ και η επιφάνεια που δίδεται από τήν εξίσωση $3x^2 + 5y^2 - z^2 = 4$ έχουν ως (ένα) σημείο τομής τό $P = (1, 1, 2)$. Δείξτε ότι στο P η παραπάνω καμπύλη τέμνει κάθετα τήν επιφάνεια S, δηλ. η εφαπτόμενη ευθεία τής καμπύλης στο P είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο τής S στό P.

Ασκηση 7. Δείξτε ότι υπάρχει σημείο P τής καμπύλης $\sigma(t) = (2t^2 - 6t + 1, t - 1, -t^3 + 6t)$ που η εφαπτόμενη ευθεία τής καμπύλης στο P να είναι παράλληλη με τό εφαπτόμενο επίπεδο τής επιφάνειας που ορίζεται από τήν εξίσωση $2x + y^2 + z^3 - 2z = 2$ στό σημείο της $Q = (1, 1, 1)$.

Ασκηση 8. Για κάθε μια από τίς καμπύλες τού επιπέδου που ορίζονται από τίς παρακάτω καρτεσιανές εξισώσεις, βρείτε ένα κάθετο διάνυσμα σε αυτές στο αντίστοιχο σημείο P και γράψτε τήν εξίσωση τής εφαπτόμενης ευθείας τής καμπύλης στο P σε καρτεσιανή ή παραμετρική μορφή:
α) $3x^2 + 2y^2 = 5$, $P = (1, 1)$.
β) $3x^2 - y^2 = -1$, $P = (1, 2)$.
γ) $x^3 - y^2 + 1 = 0$, $P = (2, 3)$.
δ) $x^2 + 2x - y^2 + y = 8$, $P = (2, 1)$.

Ασκηση 9. Θεωρούμε τήν έλλειψη $x^2 + x + 5y^2 - 2y = 9$ και τό σημείο της $P = (2, 1)$.
α) Βρείτε ενα σημείο $Q \neq P$ στην έλλειψη με τήν ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη ευθεία τής έλλειψης στό Q να είναι παράλλη λη με αυτήν στό P.
β) Βρείτε ενα σημείο R στην έλλειψη με τήν ιδιότητα ότι η εφαπτόμενη ευθεία τής έλλειψης στό R να είναι κάθετη με αυτήν στό P.

Ασκηση 10. Βρείτε τα αναπτύγματα Taylor πρώτης και δεύτερης τάξης (δηλ. πολυώνυμα Taylor και τα αντίστοιχα υπόλοιπα) τών παρακάτω συναρτήσεων με κέντρο τά αντίστοιχα σημεία:
α) $f(x, y) = e^{x-y}$, $P = (0, 0)$.
β) $f(x, y, z) = ze^{x+y}$, $P = (0, 0, 1)$
γ) $f(x, y) = 3x - 5yx^2 + 3y^2$, $P = (0, 0)$
δ) $f(x, y) = 3x - 5y + x^2 + 3y^2$, $P = (2, 1)$