ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ ΙΙ - ΕΑΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2016-17
ΑΣΚΗΣΕΙΣ #9

Άσκηση 1. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία για τίς παρακάτω συναρτήσεις:
α) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$.
β) $f(x,y) = xy + yx^5 + xy^5$.
γ) $f(x,y) = \cos(x+y)$.
δ) $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.
ε) $f(x,y) = e^{1-x^2+y^2}$.
στ) $f(x,y) = x^2 + 2xy$.

Ασκηση 2. Για κάθε μια από τις περιπτώσεις τής άσκησης 1, εφαρμόστε τό κριτήριο τής δευτέρας παραγώγου και βρείτε σε ποιά από τά κρίσιμα σημεία η συνάρτηση έχει τοπικό μέγιστο, ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο. Στην περίπτωση τού σαγματικού σημείου βρείτε τίς δύο ευθείες τού επιπέδου ανάμεσα στίς οποίες αλλάζει συμπεριφορά η συνάρτηση.

Ασκηση 3. Έστω $f(x,y) = ax^2 + by^2$, όπου a, b σταθερές. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία τής f και εξετάστε πότε είναι τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα.

Ασκηση 4. Βρείτε τα κρίσιμα σημεία και σε ποιά από αυτά η συνάρτηση $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy$ έχει τοπικό μέγιστο, τοπικό ελάχιστο ή έχει σαγματικό σημείο

Ασκηση 5. Έστω a, b πραγματικοί αριθμοί με $a, b \neq 0$. Αν η f$(x,y) = e^{ax^2+by^2}$ έχει τοπικό μέγιστο, τότε τί συμπέρασμα βγάζετε για το πρόσημο τών a, b;

Ασκηση 6. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x,y) = \sin(xy)$.
α) Βρείτε τα κρίσιμα σημεία της $f(x,y)$.
β) Εξετάσατε την φύση τους (τοπικά μέγιστα, τοπικά ελάχιστα, σαγματικά σημεία). (*Υπόδειξη:* Στα σημεία στα οποία το κριτίριο της 2ης παραγώγου αποτυγχάνει, προσπαθείστε να βρείτε έναν πιο εύκολο τρόπο για να συμπεράνετε ότι είναι τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο).

Ασκηση 7. Ποιά από τά παρακάτω χωρία τού επιπέδου είναι κλειστά φραγμένα χωρία;
α) $A = \{(x,y),\ x \geq 0\}$.
β) $B = \{(x,y),\ 0 \leq y <\leq 2\}$.
γ) $C = \{(x,y),\ x^2 + y^2 < 1\}$.
δ) $D = \{(x,y),\ x^2 - y^2 < 1\}$.
ε) $E = \{(x,y),\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$.
στ)$F = \{(x,y),\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + 2y \leq 1\}$.

Ασκηση 8. Θεωρούμε τήν καμπύλη $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με $\sigma(t) = (\sqrt{t}, \sqrt{t}, -\frac{t+3}{4})$ και την συνάρτηση $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ με $f(x,y) = x^2 + y^2 - 3$.
α) Δείξτε ότι η παραπάνω καμπύλη τέμνει τό γράφημα τής συνάρτησης σε μοναδικό

σημείο P.
β) Δείξτε ότι η εφαπτόμενη ευθεία τής παραπάνω καμπύλης στο σημείο P είναι κάθετη στο εφαπτόμενο επίπεδο στο γράφημα της συνάρτησης στο ίδιο σημείο.

Πρόβλημα 9. Βρείτε τά σημεία τής καμπύλης τού επιπέδου που ορίζεται από τήν εξίσωση $x^2 + y^2 + 4x + 4y + 2 = 0$ στα οποία η εφαπτόμενη ευθεία διέρχεται από τήν αρχή τών αξόνων.

Ασκηση 10. Θεωρούμε τήν μοναδιαία σφαίρα στον χώρο που ορίζεται από τήν εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.
α) Έστω $P = (x_0, y_0, z_0)$ σημείο τής παραπάνω σφαίρας. Γράψτε τήν εξίσωση τού εφαπτόμενου επιπέδου Π_P στην σφαίρα στο σημείο P.
β) Έστω (ϵ) η ευθεία τού χώρου που ορίζεται από τις παραμετρικές εξισώσεις $x = 2 - 2t$, $y = 3t$, $z = 0$. Βρείτε όλα τά σημεία $P = (x_0, y_0, z_0)$ τής παραπάνω σφαίρας με τήν ιδιότητα ότι τό αντίστοιχο εφαπτόμενο επίπεδο Π_P περιέχει τήν ευθεία (ϵ) (*Υπόδειξη:* για να περιέχει τό επίπεδο Π_P τήν ευθεία (ϵ) αρκεί να περιέχει δύο διαφορετικά σημεία της).