ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1

Ασκηση 1. Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες αποκλίνουν

α) (a_n) με $a_n = 10n + 35$.

β) (a_n) με $a_n = (-1)^n n$.

Ασκηση 2. Με χρήση μόνον του ορισμού μελετήστε ως προς την σύγκλιση (δηλ. δείξτε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν και αν συγκλίνουν βρείτε το όριο) τις ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \frac{1}{n^2}$.

β) $a_n = \frac{1}{2^n}$.

γ) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$.

δ) $a_n = 2 + (-1)^n$.

ε) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

στ) $a_n = 2^n$.

ζ) $a_n = \frac{\sin n}{n}$.

Ασκηση 3. Με χρήση τών ιδιοτήτων τών ορίων, μελετήστε ως προς τήν σύγκλιση τίς ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+1}$.

β) $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}$ (*Υπόδειξη:* Άσκηση 2β).

γ) $a_n = \frac{n^2+n-1}{n^3+1}$.

δ) $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$.

ε) $a_n = \frac{2n+\sin n}{n+\sin 5n}$ (*Υπόδειξη:* Άσκηση 2ζ).

στ) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2+n}}$ (*Υπόδειξη:* Άσκηση 2ε).

ζ) $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$.

η) $a_n = \frac{2^n+1}{4^n+1}$ (*Υπόδειξη:* Άσκηση 2β).

ϑ) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ (*Υπόδειξη:* Άσκηση 2ε).

ι) $a_n = \frac{1+\cos n}{n+3}$.

Ασκηση 4.

α) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a > 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = a^n$ δεν είναι φραγμένη και επομένως αποκλίνει.

β) Έστω a πραγματικός αριθμός με $0 < a < 1$. Δείξτε, με βάση τον ορισμό, ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.

Ασκηση 5. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών (αν αυτά υπάρχουν - αν δεν υπάρχουν δικαιολογείστε το):

α) $a_n = \frac{2^n}{3n}$.

β) $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

γ) $a_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.

δ) $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.
Υπόδειξη: Εφαρμόστε το κριτήριο του εγκιβωτισμού, χρησιμοποιόντας ότι $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$.