

## ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10

**Άσκηση 1.** Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α)  $\int \sin^5 x \, dx$  .

β)  $\int \sin^4 x \, dx$  .

γ)  $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$  .

δ)  $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$  .

ε)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$  .

**Άσκηση 2.** Υπολογίστε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

α)  $\int_{1/2}^2 \sqrt{2x+3} \, dx$  .

β)  $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3+\cos x} \, dx$  .

γ)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2x \cos^3 2x \, dx$  .

δ)  $\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx$  .

ε)  $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$  .

στ)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$  .

**Άσκηση 3.** Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α)  $\int x^2 \ln x \, dx$  .

β)  $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$  .

γ)  $\int x \cos 3x \, dx$  .

δ)  $\int x^2 \sin x \, dx$  .

ε)  $\int x^3 e^{-x} \, dx$  .

στ)  $\int x(\ln x)^2 \, dx$  .

ζ)  $\int \sin(\ln x) \, dx$  .

η)  $\int e^x \cos x \, dx$  .

θ)  $\int \frac{\ln x}{x} \, dx$  .

ι)  $\int (x+1)^2 e^x \, dx$  .

**Άσκηση 4.** Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α)  $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$  .

β)  $\int \frac{x}{9x^2-6x+5} \, dx$  .

$$\gamma) \int \frac{x^3}{4x^2+4x+5} dx .$$

$$\delta) \int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx .$$

$$\epsilon) \int \frac{dx}{x^2+2x} .$$

$$\sigma\tau) \int \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx .$$

**Άσκηση 5.** Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

$$\alpha) \int \frac{x}{x^3-x^2-6x} dx .$$

$$\beta) \int \frac{x^4+1}{x^3-2x^2+x} dx .$$

$$\gamma) \int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx .$$

$$\delta) \int \frac{1}{(x^2-x-2)^2} dx .$$

**Άσκηση 6.** Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

$$\alpha) 3^5 + 3^6 + \dots + 3^n .$$

$$\beta) \frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{5^n} .$$

$$\gamma) 2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n} .$$

$$\delta) 2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2n+1} .$$

**Άσκηση 7.** Συμβολίζουμε ως  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  την σειρά  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$ . Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν και ποιές αποκλίνουν. Στην περίπτωση που συγκλίνουν, βρείτε πού συγκλίνουν.

$$\alpha) \frac{11}{100} + \frac{11}{100^2} + \frac{11}{100^3} + \dots + \frac{11}{100^n} + \dots .$$

$$\beta) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n} .$$

$$\gamma) \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots .$$

$$\delta) \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n} \right) .$$

$$\epsilon) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{5^n} .$$

$$\sigma\tau) \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi) .$$

$$\zeta) \sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3})^n .$$

$$\eta) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} .$$

$$\theta) \frac{3^5}{4^3} - \frac{3^6}{4^4} + \frac{3^7}{4^5} - \frac{3^8}{4^6} + \dots .$$

**Πρόβλημα 1** Θεωρούμε τήν συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

- α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι συνεχής.  
 β) Είναι η  $f$  παραγωγίσιμη;  
 γ) Βρείτε το όριο  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$ .

**Πρόβλημα 2** α) Δείξτε ότι για κάθε φυσικό  $n$  ισχύει ότι  $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$ .

Υπόδειξη: Μελετήστε το ολοκλήρωμα  $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$ .

β) Δείξτε ότι η ακολουθία  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$  συγκλίνει.

**Πρόβλημα 3** Έστω  $f(x), g(x)$  συνεχείς συναρτήσεις στο  $[a, b]$ . Δείξτε ότι

$$\left( \int_a^b f(x) g(x) dx \right)^2 \leq \left( \int_a^b f(x)^2 dx \right) \left( \int_a^b g(x)^2 dx \right)$$

Υπόδειξη: αποδείξτε ότι αν  $at^2 + 2bts + cs^2 \geq 0$  για κάθε  $t, s \in \mathbb{R}$  τότε  $b^2 - ac \leq 0$ .

*Σημείωση:* Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τά δούμε.