

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 10 (με υποδείξεις)

Άσκηση 1. Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int \sin^5 x \, dx$.

Υπόδειξη: Με αλλαγή μεταβλητής: $\frac{1}{5} \cos^5 x - \frac{2}{3} \cos^3 x + \cos x + c$.

β) $\int \sin^4 x \, dx$.

Υπόδειξη: Με διπλάσια γωνία: $\frac{1}{32}(\sin(4x) - 8 \sin(2x) + 12x) + c$.

γ) $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx$.

Υπόδειξη: Με χρήση τού τύπου $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$: $\frac{1}{192}(12x - 3 \sin(4x) + 4 \sin^3(2x)) + c$.

δ) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \, dx$.

Υπόδειξη: $\tan x - \frac{3x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4} + c$.

ε) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{\cos x} + \cos x + c$.

Άσκηση 2. Υπολογίστε τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα:

α) $\int_{1/2}^2 \sqrt{2x+3} \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{3}(7\sqrt{7} - 8)$.

β) $\int_{-\pi}^0 \frac{\sin x}{3+\cos x} \, dx$.

Υπόδειξη: $-\ln 2$.

γ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 2x \cos^3 2x \, dx$.

Υπόδειξη: 0.

δ) $\int_0^{\pi} e^{\cos x} \sin x \, dx$.

Υπόδειξη: $e - e^{-1}$.

ε) $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{4}{15}$.

στ) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin x \sin 2x \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{4}{3}$.

Άσκηση 3. Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int x^2 \ln x \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{3}x^3 \ln x - \frac{x^3}{9} + c$.

β) $\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$.

Υπόδειξη: $x \tan x + \ln(\cos x) + c$.

γ) $\int x \cos 3x \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{3}x \sin(3x) + \frac{1}{9} \cos(3x) + c$.

δ) $\int x^2 \sin x \, dx$.

Υπόδειξη: $2(x \sin x + \cos x) - x^2 \cos x + c$.

ε) $\int x^3 e^{-x} \, dx$.

Υπόδειξη: $-(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)e^{-x} + c$.

στ) $\int x(\ln x)^2 \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{4}x^2(2 \ln^2 x - 2 \ln x + 1) + c$.

ζ) $\int \sin(\ln x) \, dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2}x(\sin(\ln x) - \cos(\ln x))$.

η) $\int e^x \cos x dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + c$.

θ) $\int \frac{\ln x}{x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{\ln^2 x}{2} + c$.

ι) $\int (x+1)^2 e^x dx$.

Υπόδειξη: $(x^2 + 1)e^x + c$.

Άσκηση 4. Υπολογίστε τα παρακάτω αόριστα ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{1}{x^2-2x+5} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2} \tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$.

β) $\int \frac{x}{9x^2-6x+5} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{18}[\ln((3x-1)^2+4) + \tan^{-1}\left(\frac{3x-1}{2}\right)] + c$.

γ) $\int \frac{x^3}{4x^2+4x+5} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{x^2}{8} - \frac{x}{4} + \frac{11}{32} \tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{2}\right) - \frac{1}{32} \ln\left(\frac{(2x+1)^2}{4} + 1\right) + c$.

δ) $\int \frac{5x-7}{x^2-3x+2} dx$.

Υπόδειξη: $2 \ln|x-1| + 3 \ln|x-2| + c$.

ε) $\int \frac{1}{x^2+2x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2} \ln\left|\frac{x}{x+2}\right| + c$.

στ) $\int \frac{x^3}{x^2+2x+1} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{1}{x+1} + 3 \ln|x+1| + c$.

Άσκηση 5. Υπολογίστε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int \frac{x}{x^3-x^2-6x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{5} \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + c$.

β) $\int \frac{x^4+1}{x^3-2x^2+x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) - \frac{2}{x-1} + \ln|x(x-1)^2| + c$

γ) $\int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{16} \ln\left|\frac{(x+2)(x-2)^5}{x^6}\right|$.

δ) $\int \frac{1}{(x^2-x-2)^2} dx$.

Υπόδειξη: $\frac{2}{27} \ln\left|\frac{x+1}{x-2}\right| - \frac{1}{9(x+1)} - \frac{1}{9(x-2)} + c$.

Άσκηση 6. Υπολογίστε τα παρακάτω αθροίσματα:

α) $3^5 + 3^6 + \dots + 3^n$.

Υπόδειξη: $\frac{3^5}{2}(3^{n-4} - 1)$.

β) $\frac{1}{5} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{5^4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{5^n}$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{6}\left(1 - \left(-\frac{1}{5}\right)^n\right)$.

γ) $2^2 + 2^4 + 2^6 + \dots + 2^{2n}$.

Υπόδειξη: $\frac{4}{3}(2^{2n} - 1)$.

δ) $2^3 + 2^5 + 2^7 + \dots + 2^{2n+1}$.

Υπόδειξη: $\frac{8}{3}(2^{2n} - 1)$.

Άσκηση 7. Συμβολίζουμε ως $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ την σειρά $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγχλίνουν και ποιές αποκλίνουν. Στην περίπτωση που συγχλίνουν, βρείτε πού συγχλίνουν.

α) $\frac{11}{100} + \frac{11}{100^2} + \frac{11}{100^3} + \dots + \frac{11}{100^n} + \dots$.

Υπόδειξη: $\frac{11}{99}$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n}$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{e-1}$.

γ) $\frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{4^5} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{48}$.

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{2}{3^n})$.

Υπόδειξη: 2.

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+2}}{5^n}$.

Υπόδειξη: $\frac{8}{3}$.

στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi)$.

Υπόδειξη: Αποκλίνει.

ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3})^n$.

Υπόδειξη: Αποκλίνει.

η) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-3)(4n+1)}$.

Υπόδειξη: Όπως στα απλά κλασματά γράφουμε $\frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{1}{4}(\frac{1}{4n-3} - \frac{1}{4n+1})$.

Οπότε $s_n = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{4n+1})$ και άρα η σειρά συγχλίνει στο $\frac{1}{4}$.

θ) $\frac{3^5}{4^3} - \frac{3^6}{4^4} + \frac{3^7}{4^5} - \frac{3^8}{4^6} + \dots$.

Υπόδειξη: $\frac{3^5}{4^{27}}$.

Πρόβλημα 1 Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής.

β) Είναι η f παραγωγίσιμη;

γ) Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x}$.

Πρόβλημα 2 α) Δείξτε ότι για κάθε φυσικό n ισχύει ότι $\frac{1}{n+1} \leq \ln(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

Υπόδειξη: Μελετήστε το ολοκλήρωμα $\int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx$.

β) Δείξτε ότι η ακολουθία $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ συγχλίνει.

Πρόβλημα 3 Έστω $f(x), g(x)$ συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, b]$. Δείξτε ότι

$$\left(\int_a^b f(x) g(x) dx\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right) \left(\int_a^b g(x)^2 dx\right)$$

Υπόδειξη: αποδείξτε ότι αν $at^2 + 2bts + cs^2 \geq 0$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ τότε $b^2 - ac \leq 0$.

Σημείωση: Τα προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τά δούμε.