ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #11

Ασκηση 1. Με χρήση τού κριτηρίου τού ολοκληρώματος εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν και ποιές αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.

Ασκηση 2. Δείξτε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n+1}$.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$.

στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n3^n}$.

ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$.

Ασκηση 3. Δείξτε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.

β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$.

γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.

δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-15n+2}{n^4}$.

ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.

στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n}$.

Ασκηση 4. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 5$, κέντρου 0, για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \cos x$,

β) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,

γ) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$,

δ) $f(x) = x^3 + 2x + 1$,

ε) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x - 1$.

Ασκηση 5. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt{1,02}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

Ασκηση 6. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt[3]{8,5}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.

Ασκηση 7. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $e^{0.3}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}.

Ασκηση 8. Γράψτε το πολυώνυμο $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$ ως ένα πολυώνυμο σε δυνάμεις τού $(x + 2)$ (Ϋπόδειξη: χρήση τού Θεωρήματος Taylor).

Ασκηση 9. Βρείτε για ποιά x η παρακάτω δυναμοσειρές συγκλίνουν και για ποιά αποκλίνουν

α) $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$

β) $3 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + 3^nx^n + \cdots$

γ) $3x^2 + 3^2x^3 + 3^3x^4 + \cdots + 3^{n-1}x^n + \cdots$

Πρόβλημα 1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor δείξτε ότι ο αριθμός e είναι άρρητος, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:
α) Γράψτε το θεώρημα του Taylor για την συνάρτηση $f(x) = e^x$, για βαθμό n και κέντρο $a = 0$. Εφαρμόστε το για $x = 1$, οπότε εκφράστε τον e ως άθροισμα

$$e = \rho + R, \qquad (\star)$$

όπου ρ ρητός και R ο αριθμός που προκύπτει από το υπόλοιπο Taylor.
β) Υποθέστε ότι ο e είναι ρητός και άρα γράψτε τον στην μορφή $e = \frac{a}{b}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$. Διαλέξτε το n στο ερώτημα α) αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορείτε να συμπεράνετε από την σχέση $(\star)$ ότι ο $n!R$ είναι ακέραιος αριθμός.
γ) Καταλήξετε σε άτοπο χρησιμοποιώντας την μορφή του R που δίδεται από το θεώρημα του Taylor για να δείξετε ότι $0 < n!R < 1$ (για n αρκετά μεγάλο). Θεωρήστε γνωστό ότι $e < 3$.

Πρόβλημα 2. α) Δείξτε ότι για $x > 0$ ισχύει ότι $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1 + x} < 1 + \frac{x}{2}$.
β) Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}(1 + \frac{x_n}{2} - \sqrt{1 + x_n})$ για $n \geq 2$. Ορίζουμε την ακολουθία (y_n), $n \geq 1$, από την σχέση $y_n = 4^n x_n$. Δείξτε ότι η (y_n) συγκλίνει.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)}(\frac{2}{3})^n = 2$.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τά δούμε.