ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #11 (με υποδείξεις)

Ασκηση 1. Με χρήση τού κριτηρίου τού ολοκληρώματος εξετάστε ποιές από τις παρακάτω σειρές συγκλίνουν και ποιές αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Υπόδειξη: αποκλίνει.
β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει.
γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει.

Ασκηση 2. Δείξτε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.
β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+3n+1}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει.
δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2+1}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$.
ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n+1}}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/4}}$.
στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n3^n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$.
ζ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{2^n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

Ασκηση 3. Δείξτε αν οι παρακάτω σειρές συγκλίνουν ή αποκλίνουν

α) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{n!}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Κριτήριο λόγου.
β) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{e^n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Κριτήριο λόγου.
γ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{e^n}$.
Υπόδειξη: αποκλίνει. Κριτήριο λόγου.
δ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-15n+2}{n^4}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Σύγκριση με τήν $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.
ε) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει. Κριτήριο λόγου.
στ) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,2^n}$.
Υπόδειξη: αποκλίνει. Κριτήριο λόγου.

Ασκηση 4. Βρείτε τα πολυώνυμα Taylor βαθμού $n = 5$, κέντρου 0, για τις παρακάτω συναρτήσεις:

α) $f(x) = \cos x$,
Υπόδειξη: $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{120}$.
β) $f(x) = \frac{1}{1-x}$,
Υπόδειξη: $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5$.
γ) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$,
Υπόδειξη: $1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - 32x^5$.
δ) $f(x) = x^3 + 2x + 1$,
Υπόδειξη: $1 + 2x + x^3$.
ε) $f(x) = x^6 + 3x^4 + x - 1$.
Υπόδειξη: $-1 + x + 3x^4$.

Ασκηση 5. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt{1,02}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.
Υπόδειξη: Taylor στην $f(x) = \sqrt{x}$ με κέντρο $a = 1$ και $n = 1$. Προσεγγιστική τιμή: 1.01

Ασκηση 6. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $\sqrt[3]{8,5}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-2}.
Υπόδειξη: Taylor στην $f(x) = \sqrt[3]{x}$ με κέντρο $a = 8$ και $n = 1$. Προσεγγιστική τιμή: 49/24.

Ασκηση 7. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα του Taylor για να υπολογίσετε το $e^{0.3}$ με σφάλμα μικρότερο του 10^{-4}.
Υπόδειξη: Taylor στην $f(x) = e^x$ με κέντρο $a = 0$ και $n = 4$. Προσεγγιστική τιμή: 41/24.

Ασκηση 8. Γράψτε το πολυώνυμο $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^2 + x - 1$ ως ένα πολυώνυμο σε δυνάμεις τού $(x + 2)$ (Ϋπόδειξη: χρήση τού Θεωρήματος Taylor).
Υπόδειξη: $5 - 7(x + 2) - 10(x + 2)^2 + 16(x + 2)^3 - 7(x + 2)^4 + (x + 2)^5$.

Ασκηση 9. Βρείτε για ποιά x η παρακάτω δυναμοσειρές συγκλίνουν και για ποιά αποκλίνουν

α) $x^2 + x^3 + x^4 + \cdots + x^n + \cdots$.
Υπόδειξη: $x \in (-1, +1)$.
β) $3 + 3x + 3^2x^2 + 3^3x^3 + \cdots + 3^nx^n + \cdots$.
Υπόδειξη: $x \in (-1/3, +1/3)$.
γ) $3x^2 + 3^2x^3 + 3^3x^4 + \cdots + 3^{n-1}x^n + \cdots$.
Υπόδειξη: $x \in (-1/3, +1/3)$.

Πρόβλημα 1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Taylor δείξτε ότι ο αριθμός e είναι άρρητος, ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

α) Γράψτε το θεώρημα του Taylor για την συνάρτηση $f(x) = e^x$, για βαθμό n και κέντρο $a = 0$. Εφαρμόστε το για $x = 1$, οπότε εκφράστε τον e ως άθροισμα

$$e = \rho + R, \qquad (\star)$$

όπου ρ ρητός και R ο αριθμός που προκύπτει από το υπόλοιπο Taylor.
β) Υποθέστε ότι ο e είναι ρητός και άρα γράψτε τον στην μορφή $e = \frac{a}{b}$, όπου $a, b \in \mathbb{Z}$. Διαλέξτε το n στο ερώτημα α) αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορείτε να συμπεράνετε από την σχέση $(\star)$ ότι ο $n!R$ είναι ακέραιος αριθμός.
γ) Καταλήξετε σε άτοπο χρησιμοποιώντας την μορφή του R που δίδεται από το θεώρημα του Taylor για να δείξετε ότι $0 < n!R < 1$ (για n αρκετά μεγάλο). Θεωρήστε γνωστό ότι $e < 3$.

Πρόβλημα 2. α) Δείξτε ότι για $x > 0$ ισχύει ότι $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1 + \frac{x}{2}$.
β) Έστω $x_1 = 1$ και $x_{n+1} = \frac{2}{x_n}(1 + \frac{x_n}{2} - \sqrt{1+x_n})$ για $n \geq 2$. Ορίζουμε την ακολουθία (y_n), $n \geq 1$, από την σχέση $y_n = 4^n x_n$. Δείξτε ότι η (y_n) συγκλίνει.

Πρόβλημα 3. Δείξτε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n(n+1)} (\frac{2}{3})^n = 2$.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τά δούμε.