ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #1 (με υποδείξεις)

Ασκηση 1. Δείξτε ότι οι παρακάτω ακολουθίες αποκλίνουν

α) (a_n) με $a_n = 10n + 35$.
Υπόδειξη: Έστω ότι $\lim_n a_n = L \in \mathbb{R}$. Τότε θα πρέπει για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ δοθεί, να υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|a_n - L| < \epsilon$, γιά κάθε $n \geq n_0$. Οπότε πάρε πχ $\epsilon = 1$. Η τελευταία σχέση γίνεται: $a_n \in (L-1, L+1)$, γιά κάθε $n \geq n_0$. Αυτό όμως δεν μπορεί να ισχύει διότι αν πάρουμε φυσικό $n_1 > (L+1)/10$ τότε γιά κάθε $n \geq n_1$ έχω $a_n = 10n + 35 > 10n > L + 1$.

β) (a_n) με $a_n = (-1)^n n$.

Ασκηση 2. Με χρήση μόνον τού ορισμού μελετήστε ως προς την σύγκλιση (δηλ. δείξτε αν συγκλίνουν ή αποκλίνουν και αν συγκλίνουν βρείτε το όριο) τις ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \frac{1}{n^2}$.
Υπόδειξη: Τό όριο είναι τό 0.

β) $a_n = \frac{1}{2^n}$.
Υπόδειξη: Τό όριο είναι τό 0.

γ) $a_n = \frac{1}{n^2+n}$.
Υπόδειξη: Προβλέπουμε ότι το όριο θα είναι τό μηδέν. Θα πρεπει και να το αποδείξουμε, δηλ. να δείξουμε ότι για οποιοδήποτε $\epsilon > 0$ δοθεί, υπάρχει φυσικός n_0 τέτοιος ώστε $|\frac{1}{n^2+n}| < \epsilon$, γιά κάθε $n \geq n_0$. Έχω $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2}$. Οπότε αν διαλέξω φυσικό $n_0 \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$ τότε $\frac{1}{n^2+n} < \frac{1}{n^2} < \epsilon$.

δ) $a_n = 2 + (-1)^n$.
Υπόδειξη: Τό όριο δέν υπάρχει.

ε) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.
Υπόδειξη: Τό όριο είναι τό 0.

στ) $a_n = 2^n$.
Υπόδειξη: Τό όριο δέν υπάρχει (συγκλίνει στο $+\infty$).

ζ) $a_n = \frac{\sin n}{n}$.
Υπόδειξη: Όπως στην γ) με χρήση τής $|\sin x/x| \leq |1/x|$.

Ασκηση 3. Με χρήση τών ιδιοτήτων τών ορίων, μελετήστε ως προς τήν σύγκλιση τίς ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \frac{n^2+3n}{5n^2+1}$.
Υπόδειξη: Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με n^2 και εφαρμόζοντας τήν ιδιότητα τού πηλίκου έχω όριο τό $1/5$.

β) $a_n = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{2^n}$
Υπόδειξη: Σπάω το κλάσμα σε άθροισμα και εφαρμόζω Άσκηση 2β. Όριο είναι τό 2

γ) $a_n = \frac{n^2+n-1}{n^3+1}$.
Υπόδειξη: Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με n^3 και εφαρμόζοντας τήν ιδιότητα τού πηλίκου έχω όριο τό 0.

δ) $a_n = \frac{n!}{(n+2)!}$.
Υπόδειξη: Απλοποιώ το κλάσμα και βγάζω όριο τό 0.

ε) $a_n = \frac{2n+\sin n}{n+\sin 5n}$
Υπόδειξη: Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με n και εφαρμόζοντας τήν ιδιότητα τού πηλίκου και την Άσκηση 2ζ και βγάζω όριο τό 2

στ) $a_n = \sqrt{\frac{1}{n^2+n}}$
Υπόδειξη: Άσκηση 2ε) και τό όριο είναι τό 0.

ζ) $a_n = \frac{n^2-1}{2n^2+n}$.
Υπόδειξη: τό όριο είναι τό 1/2.

η) $a_n = \frac{2^n+1}{4^n+1}$
Υπόδειξη: Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με 4^n και από Άσκηση 2β έχω όριο τό 0.

ϑ) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$
Υπόδειξη: Διαιρώ αριθμητή και παρονομαστή με n και από Άσκηση 2ε έχω όριο τό 0.

ι) $a_n = \frac{1+\cos n}{n+3}$.
Υπόδειξη: $\frac{1+\cos n}{n+3} \leq \frac{2}{n+3}$.

Ασκηση 4.

α) Έστω a πραγματικός αριθμός με $a > 1$. Δείξτε ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = a^n$ δεν είναι φραγμένη και επομένως αποκλίνει.
Υπόδειξη: Έστω ότι είναι φραγμένη. Τότε θα υπάρχει M ώστε $a_n \leq M$ γιά κάθε n, δηλ. $a^n \leq M$ γιά κάθε n. Η συνάρτηση $\log_a x$ είναι γνησίως αύξουσα όταν $a > 1$. Άρα $a^n \leq M$ αν και μόνον αν $n \leq \log_a M$ γιά κάθε n. Αυτό όμως είναι άτοπο διότι πάντα μμπορώ να βρώ ένα φυσικό που υπερβαίνει έναν δοσμένο πραγματικό αριθμό (εν προκειμένω τόν $\log_a M$).

β) Έστω a πραγματικός αριθμός με $0 < a < 1$. Δείξτε, με βάση τον ορισμό, ότι η ακολουθία (a_n) με $a_n = a^n$ συγκλίνει στο 0.
Υπόδειξη: Με τον ορισμό τού ορίου και με χρήση τού ότι η συνάρτηση $\log_a x$ είναι γνησίως φθίνουσα όταν $0 < a < 1$.

Ασκηση 5. Βρείτε τα όρια των ακολουθιών (αν αυτά υπάρχουν - αν δεν υπάρχουν δικαιολογείστε το):

α) $a_n = \frac{2^n}{3n}$.
Υπόδειξη: Δεν υπάρχει - άσκηση 4α και τήν σχέση $\frac{2^n}{3n} \geq (\sqrt{2})^n$ για $n \geq 10$ (απόδειξη με επαγωγή).

β) $a_n = \frac{3^n}{2^{n+1}}$.
Υπόδειξη: Δεν υπάρχει - άσκηση 4α.

γ) $a_n = \frac{2^n}{3^{n-1}}$.
Υπόδειξη: είναι το 0 - άσκηση 4β.

δ) $a_n = \frac{2^n}{3^{n+1}}$.
Υπόδειξη: είναι το 0 - άσκηση 4β.

Ασκηση 6. Δείξτε ότι $\lim \frac{2^n}{n!} = 0$.
Υπόδειξη: Δείξτε με επαγωγή ότι $n! \geq 3^n$. Εφαρμόστε το κριτήριο τού εγκιβωτισμού (παρεμβολής), χρησιμοποιώντας ότι $\lim(\frac{2}{3})^n = 0$. Διαφορετικά, παρατηρείστε ότι $\frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdots 2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n} \leq 2 \cdot 1 \cdots 1 \cdot \frac{2}{n} \leq \frac{1}{n}$.