ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #2 (με υποδείξεις)

Ασκηση 1. Να εξετασθεί αν οι παρακάτω ακολουθίες είναι αύξουσες ή φθίνουσες.

α) (a_n) με $a_n = \frac{n}{2^n}$.
Υπόδειξη: Είναι φθίνουσα.

β) (a_n) με $a_n = \frac{n!}{n^n}$.
Υπόδειξη: Είναι φθίνουσα.

γ) (a_n) με $a_n = \frac{n^2+n}{3^n}$.
Υπόδειξη: Είναι φθίνουσα.

Ασκηση 2. Μελετήστε ως προς τήν σύγκλιση, συμπεριλαμβανομένης και τής σύγκλισης στο άπειρο, τίς ακολουθίες (a_n) με

α) $a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n}$.
Υπόδειξη: συγκλίνει στο $+\infty$.

β) $a_n = \sqrt{n+5} - \sqrt{n}$.
Υπόδειξη: Πολλαπλασιάστε με συζυγή παράσταση. Συγκλίνει στο 0.

γ) $a_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-\sqrt{n}}{n}$.
Υπόδειξη: Σπάστε το κλάσμα. Συγκλίνει στο 1.

δ) $a_n = \frac{\sqrt{n+5}-\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{n}}$.
Υπόδειξη: Σπάστε το κλάσμα. Συγκλίνει στο $-\infty$.

ε) $a_n = \frac{\sqrt{2n+5}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.
Υπόδειξη: Σπάστε το κλάσμα. Συγκλίνει στο $\sqrt{2}-1$.

Ασκηση 3. Να εξετασθούν αν οι παρακάτω ακολουθίες (a_n) είναι αύξουσες ή φθίνουσες.

α) $a_n = \frac{4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+2)}{5\cdot 7\cdot 9\cdots(2n+3)}$.
Υπόδειξη: $a_{n+1} = a_n \frac{2n+4}{2n+5}$. Είναι φθίνουσα.

β) $a_{n+1} = \frac{3a_n^2+1}{a_n+1}$ και $a_1 = 1$.
Υπόδειξη: Είναι αύξουσα: $a_{n+1} \geq a_n$ αν και μόνον αν $\frac{3a_n^2+1}{a_n+1} - a_n \geq 0$. Κάνετε τίς πράξεις και δείξτε ότι το δυώνυμο τού αριθμητή έχει αρνητική διακρίνουσα και ότι ο παρονομαστής είναι θετικός.

Ασκηση 4. α) Μελετήστε ως προς τήν σύγκλιση τήν αναδρομική ακολουθία που δίδεται από τόν τύπο $a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{3}$, με $a_1 = 2$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι είναι φθίνουσα και ότι έχει ως κάτω φράγμα και ως όριο τό 1.
β) Μπορείτε να γράψετε το a_n ως έκφραση τού n (δηλ να βρείτε ποιό είναι το a_n);
Υπόδειξη: Δείξτε με επαγωγή ότι $a_n = (\frac{2}{3})^{n-1} + 1$, για $n \geq 2$.

Ασκηση 5. Μελετήστε ως προς τήν σύγκλιση τήν αναδρομική ακολουθία που

δίδεται από τόν τύπο $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 1$, με
α) $a_1 = 5$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι είναι αύξουσα και ότι έχει ως άνω φράγμα και ως όριο τό $3 + 2\sqrt{2}$.
β) $a_1 = 6$.
Υπόδειξη: Δείξτε ότι είναι φθίνουσα και ότι έχει ως κάτω φράγμα και ως όριο τό $3 + 2\sqrt{2}$.