

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 3 (μέ υποδείξεις)

Άσκηση 1. Βρείτε τό πεδίο ορισμού και τό αντίστοιχο σύνολο τιμών τών παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \sqrt{x+4}$

Υπόδειξη: π.ο. $[-4, +\infty)$, συν.τ. $[0, +\infty)$.

β) $f(x) = \sqrt{2-\sqrt{x}}$

Υπόδειξη: π.ο. $[0, 4]$, συν.τ. $[0, \sqrt{2}]$.

γ) $f(x) = \sqrt{1+\cos 2x}$

Υπόδειξη: π.ο. \mathbb{R} , συν.τ. $[0, \sqrt{2}]$.

δ) $f(x) = \tan(x/2)$.

Υπόδειξη: π.ο. $\mathbb{R} - \{x \neq (2k+1)\pi\}$, $k \in \mathbb{Z}$, συν.τ. \mathbb{R} .

Άσκηση 2. Βρείτε τά γραφήματα τών παρακάτω συναρτησεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου:

α) $f(x) = x^2 - 3$, $I = [1, 2]$

Υπόδειξη: Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = x^2$ κατά 3 προς τά κάτω.

β) $f(x) = (x-1)^2 + 4$, $I = [0, 1]$

Υπόδειξη: Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = x^2$ κατά 1 προς τά δεξιά και κατά 4 προς τά πάνω.

γ) $f(x) = x^2 + 6x + 1$, $I = \mathbb{R}$

Υπόδειξη: Συμπληρώστε τό τετράγωνο. Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = x^2$ κατά 3 προς τά αριστερά και κατά 8 προς τά κάτω.

δ) $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $I = [0, 2)$

Υπόδειξη: Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = 1/x$ κατά 2 προς τά δεξιά.

ε) $f(x) = |2x - 5|$, $I = [-10, 10]$

Υπόδειξη: Για $x \geq 5/2$ είναι η ευθεία $y = 2x - 5$ και για $x \leq 5/2$ είναι η ευθεία $y = -2x + 5$.

στ) $f(x) = x - [x]$, $I = (-2, 2)$.

Υπόδειξη: Σέ κάθε ένα από τά διαστήματα $(-2, -1), [-1, 0), [0, 1), [1, 2)$ είναι η μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = x$, $x \in [0, 1)$ στο αριστερό άκρο τού διαστήματος.

Υπενθύμιση: Αν $x \in \mathbb{R}$, συμβολίζουμε ως $[x]$ τόν μεγαλύτερο ακέραιο που δεν υπερβαίνει τόν x .

ζ) $f(x) = \ln(x+2)$, $I = \text{μέγιστο δυνατό}$.

Υπόδειξη: $I = (-2, \infty)$. Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = \ln x$ κατά 2 προς τά αριστερά.

η) $f(x) = \log_{1/2}(x-5)$, $I = \text{μέγιστο δυνατό}$.

Υπόδειξη: $I = (5, \infty)$. Μετατόπιση τού γραφήματος τής $y = \log_{1/2} x$ κατά 5 προς τά δεξιά.

Άσκηση 3. Βρείτε τις αντίστροφες τών συναρτήσεων $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, όπου:

α) $f(x) = \frac{x+1}{3}$, $I = [0, 2]$

Υπόδειξη: $f^{-1} : [1/3, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = 3x - 1$.

β) $f(x) = x^2 + 2$, $I = (1, 2)$

Υπόδειξη: $f^{-1} : (3, 6) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \sqrt{x-2}$.

γ) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $I = [0, 1]$

Υπόδειξη: $f^{-1} : [1/2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^{-1}(x) = \frac{1-y}{y}$.

Ασκηση 4. α) Λύστε τήν εξίσωση $e^x + e^{-x} = 3$ (η απάντηση θα είναι έκφραση που περιέχει λογάριθμο).

Υπόδειξη: Βάλε $u = e^x$ και οι λύσεις είναι $\ln\left(\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right)$.

β) Λύστε τήν εξίσωση : $\ln(x - 2) - \ln(6x) = 2$.

Υπόδειξη: $x = -\frac{2}{6e^2 - 1}$.

γ) Λύστε τήν εξίσωση : $\ln(x - 1) - \ln x = 1 - \ln 2$.

Υπόδειξη: $x = -\frac{2}{e - 2}$.

Ασκηση 5. α) Γράψτε τό $\ln\left(\frac{1}{64}\right)$ ως έκφραση τού $\ln 2$.

Υπόδειξη: $-6 \ln 2$.

β) Γράψτε τό $\ln(\sqrt[5]{3})$ ως έκφραση τού $\ln 3$.

Υπόδειξη: $\frac{1}{5} \ln 3$.

γ) Γράψτε τό $\log_4(\sqrt[7]{3})$ ως έκφραση τών $\ln 3, \ln 2$.

Υπόδειξη: $\frac{\ln 3}{14 \ln 2}$.

Ασκηση 6. α) Δείξτε ότι $\log_2 3 > \log_6 9$.

Υπόδειξη: Γράψτε $\log_2 3 = \frac{\ln 3}{\ln 2}$, $\log_6 9 = \frac{\ln 9}{\ln 6} = 2 \frac{\ln 3}{\ln 6}$. Επίσης, $\ln 6 = \ln 2 + \ln 3$.

β) Λύστε τήν εξίσωση $x^{x^2+5x+2} = x^2$, $x > 0$.

Υπόδειξη: Πάρε \ln : $(x^2 + 5x + 2) \ln x = 2 \ln x$. $\ln x = 0$ δηλ. $x = 1$ είναι λύση. Αν $x \neq 1$ τότε $x^2 + 5x = 0$ που δεν έχει θετική λύση.