

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4

Άσκηση 1. Βρείτε τούς παρακάτω αριθμούς:

- α) $\sin(\cos^{-1} 0.3)$,
- β) $\sin(\tan^{-1} \sqrt{5})$,
- γ) $\tan(\cos^{-1} 1/3)$,
- δ) $\cos(\tan^{-1} \sqrt{2})$,

Άσκηση 2. Έστω $0 < x \leq 1$. Δείξτε ότι $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$.

Άσκηση 3. Βρείτε σε ποιά διαστήματα η συνάρτηση $f(x) = (x-1)(x-5)(x+1)(x+3)$ είναι γν. αύξουσα και σε ποιά γν. φθίνουσα.

Άσκηση 4 Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = [x]$, όπου $[] =$ ακέραιο μέρος και $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

- α) Σχεδιάστε τὰ γραφήματα των f, g .
- β) Δείξτε ότι η σύνθεση $g \circ f$ δεν ορίζεται.
- γ) Δείξτε ότι η σύνθεση $f \circ g$ ορίζεται. Βρείτε τὸ γράφημά της.

Άσκηση 5. Υπολογίστε τὰ παρακάτω ὅρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

- α) $\lim_{x \rightarrow 1} x(x-2)(x^3+5)$,
- β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+1}$,
- γ) $\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)^{855}$,
- δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$,
- ε) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$.

Για τα δ) και ε) θυμηθείτε ότι όταν εξετάζουμε ὄριο $\lim_{x \rightarrow c}$ λαμβάνουμε υπόψιν μόνο τὶς τιμές τῆς συνάρτησης σε σημεία γύρω ἀπὸ τὸ c , ἀλλὰ ὄχι στο c .

Άσκηση 6. Υπολογίστε τὰ παρακάτω ὅρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x+1},$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \sin x}{x}.$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} [x], \quad \lim_{x \rightarrow 0} x[x].$$

Άσκηση 7. Υπολογίστε τὰ παρακάτω ὅρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]}$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}.$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}.$$

δ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2 - 9}$$

ε)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x + 3}{x^2 - 9}$$

στ)

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]^2 - 9}{x^2 - 9}$$

**** Πρόβλημα 1.** α) Βρείτε τό όριο τής ακολουθίας (a_n) με

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Υπόδειξη: Θεώρημα εγκιβωτισμού.

β) Δείξτε ότι

$$\lim(n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε φυσικό k με $1 \leq k \leq n$, ισχύει $k(n-k+1) \geq n$.

γ) Εξετάστε ως προς τήν σύγκλιση τήν ακολουθία $a_n = n - \sqrt{(n-a)(n-b)}$.

****Πρόβλημα 2.** Θεωρούμε τήν ακολουθία (a_n) με $a_1 = 2$ και $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$.

α) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα και φραγμένη από κάτω. Χρησιμοποιώντας αυτό, υπολογίστε τό όριο τής.

β) Δείξτε ότι

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτό, υπολογίστε ξανά (με διαφορετικό τρόπο) τό όριο τής.

****Πρόβλημα 3.** Θεωρούμε τήν συνάρτηση $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1, \frac{5}{2}]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\frac{5}{2}, 4]$ (πρέπει να δουλέψετε μόνο με τον ορισμό. Μην χρησιμοποιήσετε το κριτήριο τής παραγώγου που έχετε μάθει στο σχολείο!!).

β) Σχεδιάστε το γράφημα τής f .

γ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα τής f , βρείτε το γράφημα τής συνάρτησης $g : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = [x^2 - 5x + 6]$, όπου $[\] =$ ακέραιο μέρος.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.