

## ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 4 (μέ υποδείξεις)

**Άσκηση 1.** Βρείτε τούς παρακάτω αριθμούς:

α)  $\sin(\cos^{-1} 0.3)$ ,

Υπόδειξη:  $\frac{\sqrt{91}}{10}$ .

β)  $\sin(\tan^{-1} \sqrt{5})$ ,

Υπόδειξη:  $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ .

γ)  $\tan(\cos^{-1} 1/3)$ ,

Υπόδειξη:  $\sqrt{8}$ .

δ)  $\cos(\tan^{-1} \sqrt{2})$ ,

Υπόδειξη:  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

**Άσκηση 2.** Έστω  $0 < x \leq 1$ . Δείξτε ότι  $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$ .

Υπόδειξη: Υλοποιήστε την γωνία  $\theta = \sin^{-1} x$  (όπως κάνατε στην άσκηση 1). Μετά δείτε στο τρίγωνο που έχετε σχηματίσει ποιά είναι η γωνία  $\phi = \cos^{-1} x$ .

**Άσκηση 3.** Βρείτε σε ποιά διαστήματα η συνάρτηση  $f(x) = (x-1)(x-5)(x+1)(x+3)$  είναι γν. αύξουσα και σε ποιά γν. φθίνουσα.

Υπόδειξη: Θα τήν λύσουμε αργότερα (τήν έβαλα από λάθος σε αυτό το φυλλάδιο).

**Άσκηση 4** Θεωρούμε τις συναρτήσεις  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = [x]$ , όπου  $[ ] =$  ακέραιο μέρος και  $g : [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = \frac{1}{x-1}$ .

α) Σχεδιάστε τά γραφήματα των  $f, g$ .

Υπόδειξη: Το γράφημα τής  $f$  είναι ένα κατά τμήματα σταθερό. Τής  $g$  είναι η μεταφορά τού γραφήματος τής  $y = 1/x$  κατά ένα προς τα δεξιά.

β) Δείξτε ότι η σύνθεση  $g \circ f$  δεν ορίζεται.

Υπόδειξη: Για να ορίζεται η σύνθεση θα πρέπει το συν. τιμών τής  $f$  να είναι υποσύνολο τού πεδίου ορισμού τής  $g$ . Αυτό δεν ισχύει στην παραπάνω περίπτωση (τό σύνολο τιμών τής  $f$  είναι το  $\{0, 1, 2\}$ ).

γ) Δείξτε ότι η σύνθεση  $f \circ g$  ορίζεται. Βρείτε τό γράφημά της.

Υπόδειξη: Εδώ ισχύει ότι το συν. τιμών τής  $g$  είναι υποσύνολο τού πεδίου ορισμού τής  $f$ . Το γράφημα τής σύνθεσης  $f \circ g$  είναι το γράφημα τής  $y = [\frac{1}{x-1}]$ ,  $2 \leq x \leq 3$ . Σε αυτό τό διάστημα τό  $\frac{1}{x-1}$  παίρνει τιμές στο  $[1/2, 1]$  άρα...

**Άσκηση 5.** Υπολογίστε τά παρακάτω όρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} x(x-2)(x^3+5)$ ,

Υπόδειξη:  $-6$ .

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{x^3+1}$ ,

Υπόδειξη:  $2$ .

γ)  $\lim_{x \rightarrow 2} (x+3)^{855}$ ,

Υπόδειξη:  $5^{855}$ .

δ)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}$ ,

Υπόδειξη:  $3/2$ .

ε)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$ .

Υπόδειξη:  $1/3$ .

Για τα δ) και ε) θυμηθείτε ότι όταν εξετάζουμε όριο  $\lim_{x \rightarrow c}$  λαμβάνουμε υπόψιν μόνο

τίς τιμές τής συνάρτησης σε σημεία γύρω από τό  $c$ , αλλά όχι στο  $c$ .

**Άσκηση 6.** Υπολογίστε τά παρακάτω όρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x+1}$ .

Υπόδειξη: 0.

β)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin x}{x}$ .

Υπόδειξη: 1.

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0} [x]$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} x[x]$ .

Υπόδειξη: Τό πρώτο δέν υπάρχει, τό δεύτερο είναι 0 (δείτε τα πλευρικά όρια).

**Άσκηση 7.** Υπολογίστε τά παρακάτω όρια συναρτήσεων (εάν υπάρχουν):

α)  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{[x]}$

Υπόδειξη: 2.

β)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{[x]}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{[x]}$ .

Υπόδειξη: 1 και  $-1$ .

γ)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{|x|}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$ .

Υπόδειξη: Τό πρώτο 1, τό δεύτερο δεν υπάρχει (δείτε τα πλευρικά όρια).

δ)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x^2-9}$

Υπόδειξη:  $+\infty$ .

ε)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x^2-9}$

Υπόδειξη:  $-\infty$ .

στ)  $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]^2-9}{x^2-9}$

Υπόδειξη:  $+\infty$ .

**\*\* Πρόβλημα 1.** α) Βρείτε τό όριο τής ακολουθίας  $(a_n)$  με

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} .$$

Υπόδειξη: Θεώρημα εγκλιτισμού.

β) Δείξτε ότι

$$\lim(n!)^{\frac{1}{n}} = +\infty$$

Υπόδειξη: Δείξτε πρώτα ότι, για κάθε φυσικό  $k$  με  $1 \leq k \leq n$ , ισχύει  $k(n-k+1) \geq n$ .

γ) Εξετάστε ως πρός τήν σύγκλιση τήν ακολουθία  $a_n = n - \sqrt{(n-a)(n-b)}$ .

**\*\*Πρόβλημα 2.** Θεωρούμε τήν ακολουθία  $(a_n)$  με  $a_1 = 2$  και  $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ .

α) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι φθίνουσα και φραγμένη από κάτω. Χρησιμοποιώντας αυτό, υπολογίστε τό όριό τής.

β) Δείξτε ότι

$$\frac{a_n - 1}{a_n + 1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}} .$$

Χρησιμοποιώντας αυτό, υπολογίστε ξανά (με διαφορετικό τρόπο) τό όριό τής.

**\*\*Πρόβλημα 3.** Θεωρούμε τήν συνάρτηση  $f : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^2 - 5x + 6$ .

α) Δείξτε ότι η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[1, \frac{5}{2}]$  και γνησίως αύξουσα

στο διάστημα  $[\frac{5}{2}, 4]$  (πρέπει να δουλέψετε μόνο με τον ορισμό. Μην χρησιμοποιήσετε το κριτήριο της παραγώγου που έχετε μάθει στο σχολείο!!).

β) Σχεδιάστε το γράφημα της  $f$ .

γ) Χρησιμοποιώντας το γράφημα της  $f$ , βρείτε το γράφημα της συνάρτησης  $g : [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}$  με  $g(x) = [x^2 - 5x + 6]$ , όπου  $[ ] =$  ακέραιο μέρος.

*Σημείωση:* Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.