

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5

Άσκηση 1. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες του γραφήματος της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$.

Άσκηση 2. Να βρείτε τα όρια

α)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \left(\frac{5x^2 - 1}{x^2} \right)$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \cos \frac{1}{x} \right)$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1}$$

δ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$$

ε)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 + 1}{x^3 + x^2 + 2}$$

στ)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x\sqrt{x} + x^2 - 1}$$

Σημείωση: Στις ασκήσεις ε) και στ) βρείτε πώς είναι το γράφημα της συνάρτησης κοντά στην οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow +\infty$ (ιδιαίτερα δείτε αν το γράφημα είναι πάνω ή κάτω από την ασύμπτωτη).

Άσκηση 3. Να βρείτε τα όρια

α)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^5 + x^2}$$

β)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$$

γ)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x}$$

Άσκηση 4. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x, & \text{αν } x \geq 0 \\ [x + 2], & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 0$;

Άσκηση 5. Ποιά τιμή πρέπει να δώσουμε στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 3$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 2ax, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases}$$

Άσκηση 6 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 - 3, & \text{αν } x \in [1, 2] \\ -2x + 7, & \text{αν } x \in (2, 3] \end{cases}.$$

α) Σχεδιάστε το γράφημα της f .

β) Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση.

γ) Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση.

δ) Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . (Για την αντίστροφη, πρέπει να βρείτε τον τύπο που την ορίζει, όπως επίσης, και το πεδίο ορισμού της).

****Πρόβλημα 1.** Έστω $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1}$. Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

****Πρόβλημα 2.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow a} [(a^2 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2a}]$.

****Πρόβλημα 3.** Έστω $p \geq 3$ ακέραιος. Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + \frac{1}{x})^p - x^p]$.

****Πρόβλημα 4.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίδεται ως

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε ακριβώς δύο σημεία.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2, 3 και 4 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.