

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 5 (Με υποδείξεις)

Άσκηση 1. Βρείτε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες τού γραφήματος τής συναρτήσεως $f(x) = \frac{x}{x^2+x-2}$.

Υπόδειξη: $x = -2$, $x = +1$. Η συμπεριφορά τού γραφήματος γύρω από τις ασύμπτωτες: $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

Άσκηση 2. Να βρείτε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right) \left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)$.

Υπόδειξη: 5.

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \cos \frac{1}{x}\right)$.

Υπόδειξη: 2.

γ) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x+1}$.

Υπόδειξη: $-\infty$.

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$.

Υπόδειξη: 0.

ε) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2+1}{x^3+x^2+2}$.

Υπόδειξη: Όριο είναι τό 0. Το γράφημα προσεγγίζει την ασύμπτωτο από πάνω.

στ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x\sqrt{x+x^2}-1}$.

Υπόδειξη: Όριο είναι τό 1. Το γράφημα προσεγγίζει την ασύμπτωτο από κάτω.

Σημείωση: Στίς ασκήσεις ε) και στ) βρείτε πώς είναι το γράφημα τής συνάρτησεως κοντά στήν οριζόντια ασύμπτωτη καθώς $x \rightarrow +\infty$ (ιδιαίτερα δείτε αν το γράφημα είναι πάνω ή κάτω από την ασύμπτωτη).

Άσκηση 3. Να βρείτε τα όρια

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x^5+x^2}$.

Υπόδειξη: Δέν υπάρχει (δείτε τα πλευρικά όρια)

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

Υπόδειξη: 1.

γ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x^2)}{x}$.

Υπόδειξη: 0.

Άσκηση 4. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} \cos x + x, & \text{αν } x \geq 0 \\ [x + 2], & \text{αν } x < 0. \end{cases}$$

Είναι η $f(x)$ συνεχής στο $x = 0$;

Υπόδειξη: ΝΑΙ.

Άσκηση 5. Ποιά τιμή πρέπει να δώσουμε στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 3$;

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{αν } x < 3 \\ 2ax, & \text{αν } x \geq 3. \end{cases}$$

Υπόδειξη: $a = 4/3$.

Άσκηση 6 Θεωρούμε την συνάρτηση $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} (x-1)^2 - 3, \text{ αν } x \in [1, 2] \\ -2x + 7, \text{ αν } x \in (2, 3] \end{array} \right\}.$$

α) Σχεδιάστε το γράφημα της f .

β) Δείξτε ότι η f δεν είναι μονότονη συνάρτηση.

γ) Δείξτε ότι η f είναι 1-1 συνάρτηση.

δ) Βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} . (Για την αντίστροφη, πρέπει να βρείτε τον τύπο που την ορίζει, όπως επίσης, και το πεδίο ορισμού της).

Υπόδειξη: Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $[-3, -2] \cup [1, 3)$ και η αντίστροφη είναι η

$$f^{-1}(x) = \left\{ \begin{array}{l} 1 + \sqrt{x+3}, \text{ αν } x \in [-3, -2] \\ \frac{7-x}{2}, \text{ αν } x \in [1, 3) \end{array} \right\}.$$

****Πρόβλημα 1.** Έστω $f(x) = x + 2 - \sqrt{x^2 - 5x + 1}$. Να βρεθούν τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

β) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

****Πρόβλημα 2.** Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow a} [(a^2 - x^2) \tan \frac{\pi x}{2a}]$.

****Πρόβλημα 3.** Έστω $p \geq 3$ ακέραιος. Βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x + \frac{1}{x})^p - x^p]$.

****Πρόβλημα 4.** Θεωρούμε την συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που δίδεται ως

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{l} x, \text{ αν } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, \text{ αν } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}. \end{array} \right.$$

Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε ακριβώς δύο σημεία.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2, 3 και 4 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.