

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 6

Άσκηση 1. Μπορούμε να δώσουμε κάποια τιμή στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 4$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{|x-4|}, & \text{αν } x \neq 4 \\ a, & \text{αν } x = 4. \end{cases}$$

Άσκηση 2. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μιά λύση στο \mathbb{R} .

α) $x(x-1)^2 = 1$.

β) $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$.

γ) $\sin x = x - 1$.

Άσκηση 3. Σε ποió σημείο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ η εφαπτόμενη έχει κλίση $\frac{1}{4}$;

Άσκηση 4. Βρείτε πόσες εφαπτόμενες τού γραφήματος τής συνάρτησης $y = x^2$ διέρχονται από το σημείο $(4, 1)$. Γράψτε τις εξισώσεις τους. Το ίδιο ερώτημα για το σημείο $(1, 4)$.

Άσκηση 5. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

β) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2+1})$.

γ) $f(x) = \frac{1}{\tan x}$.

δ) $f(x) = \ln(2x^2+3)$.

ε) $f(x) = 5^{x^3+1}$.

στ) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

ζ) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

η) $f(x) = e^{\sin x}$.

θ) $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x})$.

ι) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Άσκηση 6. Σε ποió σημείο, εκτός τού $(0, 0)$, τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = x^3$ η εφαπτόμενη τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(1, 0)$;

Άσκηση 7. Να βρεθούν τα σημεία τού γραφήματος τής συνάρτησης $y = \tan x$ στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y + x = 0$.

Άσκηση 8. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στό $x = 0$:

α) $f(x) = |\sin x|$

β) $f(x) = |x^2 \sin x|$.

Άσκηση 9. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Μπορείτε να βρείτε a, b ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνεχής στο 0; Μπορείτε να βρείτε a, b ώστε η παραπάνω συνάρτηση να έχει παράγωγο στο 0;

****Πρόβλημα 1.** Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0, 2]$ με $x - y = 1$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$.

****Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι υπάρχει $c \in [3, 4]$ τέτοιο ώστε $4^4 - 3^3 = e^{c \ln c} (\ln c + 1)$.

****Πρόβλημα 3.** Για $x > 0$ συγκρίνετε τους αριθμούς e^{x^2} και x^{2e} .

****Πρόβλημα 4.** Έστω $a, b, c > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{a}{x-\lambda} + \frac{b}{x-\mu} + \frac{c}{x-\nu} = 0$ έχει λύση στα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν) .

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2, 3 και 4 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.