

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ #6 (με υποδείξεις)

Άσκηση 1. Μπορούμε να δώσουμε κάποια τιμή στο a ώστε η παρακάτω συνάρτηση να είναι συνεχής στο $x = 4$;

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{|x-4|}, & \text{αν } x \neq 4 \\ a, & \text{αν } x = 4. \end{cases}$$

Υπόδειξη: Όχι. Εξετάστε πλευρικά όρια.

Άσκηση 2. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν μιά λύση στο \mathbb{R} .

α) $x(x-1)^2 = 1$.

β) $\sqrt{x} + \sqrt{1+x} = 4$.

γ) $\sin x = x - 1$.

Υπόδειξη: Μεταφέρετε όλους τους όρους στο αριστερό μέρος και σχηματίστε συνάρτηση $f(x)$. Για τό α) εξετάστε τις τιμές $f(0)$ και $f(2)$, για τό β) τις τιμές $f(0)$ και $f(3)$ και για τό γ) τις τιμές $f(0)$ και $f(\pi)$.

Άσκηση 3. Σε ποιό σημείο τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$ η εφαπτόμενη έχει κλίση $\frac{1}{4}$;

Υπόδειξη: Στό σημείο $(4, 2)$.

Άσκηση 4. Βρείτε πόσες εφαπτόμενες τού γραφήματος τής συνάρτησης $y = x^2$ διέρχονται από το σημείο $(4, 1)$. Γράψτε τις εξισώσεις τους. Το ίδιο ερώτημα για το σημείο $(1, 4)$.

Υπόδειξη: Από το $(4, 1)$ περνάνε δύο εφαπτόμενες: αυτές στα σημεία (a, a^2) τού γραφήματος με $a = 4 \pm \sqrt{15}$. Από τό $(1, 4)$ δέν περνάει εφαπτόμενη (αυτό φαίνεται και γεωμετρικά από τήν θέση τού σημείου στο γράφημα).

Άσκηση 5. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.

Υπόδειξη: $f'(x) = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$.

β) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2+1})$.

Υπόδειξη: $f'(x) = -\frac{x \sin(\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$.

γ) $f(x) = \frac{1}{\tan x}$.

Υπόδειξη: $f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

δ) $f(x) = \ln(2x^2+3)$.

Υπόδειξη: $f'(x) = \frac{4x}{2x^2+3}$.

ε) $f(x) = 5^{x^3+1}$.

Υπόδειξη: $f'(x) = 5^{x^3+1}(3x^2 \ln 5)$.

στ) $f(x) = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2$.

Υπόδειξη: $f'(x) = -4\frac{x+1}{(x-1)^3}$.

ζ) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Υπόδειξη: $f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}\right)$.

η) $f(x) = e^{\sin x}$.

Υπόδειξη: $f'(x) = \cos x e^{\sin x}$.

θ) $f(x) = \cos^{-1}(\sqrt{x})$.

Υπόδειξη: $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)x}}$.

ι) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$.

Υπόδειξη: $f'(x) = x^{\sqrt{x}} \frac{1+\ln x}{2\sqrt{x}}$.

Άσκηση 6. Σε ποιο σημείο, εκτός του $(0,0)$, τού γραφήματος τής συνάρτησης $f(x) = x^3$ η εφαπτόμενη τέμνει τον x -άξονα στο σημείο $(1,0)$;

Υπόδειξη: Στο $(3/2, 27/8)$.

Άσκηση 7. Να βρεθούν τα σημεία τού γραφήματος τής συνάρτησης $y = \tan x$ στα οποία η εφαπτόμενη είναι παράλληλη προς την ευθεία $y + x = 0$.

Υπόδειξη: Δέν υπάρχουν. Η κλίση τής ευθείας $y + x = 0$ είναι -1 . Θα πρέπει επομένως $(\tan x)' = -1$ που είναι αδύνατο.

Άσκηση 8. Εξετάστε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι παραγωγίσιμες στο $x = 0$:

α) $f(x) = |\sin x|$

β) $f(x) = |x^2 \sin x|$.

Υπόδειξη: Η α) δέν είναι και η β) είναι (εξετάστε πλευρικά όρια).

Άσκηση 9. Έστω

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 + x + 1, & \text{αν } x \leq 0 \\ ax + b, & \text{αν } x > 0. \end{cases}$$

Μπορείτε να βρείτε a, b ώστε η παραπάνω συνάρτηση να είναι συνεχής στο 0; Μπορείτε να βρείτε a, b ώστε η παραπάνω συνάρτηση να έχει παράγωγο στο 0;

Υπόδειξη: $b = 1$ για να είναι συνεχής και $a = b = 1$ για να έχει παράγωγο.

****Πρόβλημα 1.** Έστω $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση με $f(0) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x, y \in [0, 2]$ με $x - y = 1$ τέτοια ώστε $f(x) = f(y)$.

****Πρόβλημα 2.** Δείξτε ότι υπάρχει $c \in [3, 4]$ τέτοιο ώστε $4^4 - 3^3 = e^{c \ln c} (\ln c + 1)$.

****Πρόβλημα 3.** Για $x > 0$ συγκρίνετε τούς αριθμούς e^{x^2} και x^{2e} .

****Πρόβλημα 4.** Έστω $a, b, c > 0$ και $\lambda < \mu < \nu$. Δείξτε ότι η εξίσωση $\frac{a}{x-\lambda} + \frac{b}{x-\mu} + \frac{c}{x-\nu} = 0$ έχει λύση στα διαστήματα (λ, μ) και (μ, ν) .

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2, 3 και 4 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τά δουλέψει μπορεί να έλθει στίς ώρες γραφείου μου να τα δούμε.