

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ Ι - ΑΣΚΗΣΕΙΣ # 7

Άσκηση 1 Έστω $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{x}, & \text{για } x \neq 0 \\ 0, & \text{για } x = 0 \end{cases}$.

α) Δείξτε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

β) Δείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και βρείτε την $f'(0)$.

Άσκηση 2. Βρείτε την κλίση τής εφαπτόμενης τών παρακάτω καμπυλών στα σημεία που δίδονται:

α) $(x + y)^3 + (x + y)^4 = x^2 + y^2 + 22$ στο σημείο $(1, 1)$.

β) $x^2 y^2 + 1 = x^2 + y^2$ στο σημείο $(2, 1)$.

γ) $3x^2 + xy + y^2 = 9$ στο σημείο $(1, 2)$.

δ) $\cos x + \sin y = xy$ στο σημείο $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Άσκηση 3. Έστω C η καμπύλη στο xy -επίπεδο που ορίζεται από την εξίσωση $x^2 - y^2 + 3x = 0$. Βρείτε το σημείο όπου η εφαπτόμενη ευθεία τής C στο σημείο $P = (1, -2)$ τέμνει τήν ευθεία $x + y = 1$.

Άσκηση 4. Βρείτε τόν αριθμό c ο οποίος αναφέρεται στον τύπο τού θεωρήματος τής μέσης τιμής $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $f(x) = x^2 + 2x - 1$ με $[a, b] = [0, 1]$.

β) $f(x) = \sqrt{x-1}$ με $[a, b] = [1, 3]$.

Άσκηση 5. Με χρήση τού θεωρήματος τής μέσης τιμής δείξτε ότι

α) $|\sin b - \sin a| < |b - a|$.

β) $e^x > x + 1$, για $x > 0$.

γ) $\ln x + 1 < x$, για $x > 1$.

Άσκηση 6. Δείξτε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μία λύση (ρίζα) στα δοσμένα διαστήματα:

α) $x^4 + 3x + 1 = 0$ στο διάστημα $[-2, -1]$.

β) $2x^3 - 3x^2 + 12x + 6 = 0$ στο διάστημα $[-1, 0]$.

γ) $(x + 1)3^{x+1} = 1$ στο διάστημα $[-1, 0]$.

δ) $a \sin x = x + 1$ στο διάστημα $[-2, -1]$, όπου $0 < a < 1$.

Άσκηση 7 Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} |x|, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$$

Δείξτε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$. Όμως τό όριο $\lim_{x \rightarrow 0} (g(f(x)))$ δέν υπάρχει (εξετάστε πού μηδενίζεται η συνάρτηση $f(x)$). Είναι οι παραπάνω συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $x = 0$;

Πρόβλημα 1. Έστω $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Ορίζουμε την συνάρτηση $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$. Δείξτε ότι η παράγωγος $f'(x)$ έχει ακριβώς $n - 1$ ρίζες.

Πρόβλημα 2. Έστω n φυσικός αριθμός. Πόσες λύσεις έχει η εξίσωση $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$;

Πρόβλημα 3. Βρείτε όλες τις λύσεις της εξίσωσης $5^x = 3^x + 4^x$.

Σημείωση: Τά προβλήματα 1, 2 και 3 δεν θα συζητηθούν στο εργαστήριο προβλημάτων. Όποιος ενδιαφέρεται να τα δουλέψει μπορεί να έλθει στις ώρες γραφείου μου να τα δούμε.